(THIS IS A DRAFT VERSION. PLEASE DO NOT QUOTE)

De la práctica euclidiana a la práctica hilbertiana: las teorías del área plana

(From Euclidean to Hilbertian practice: the theories of area)

Eduardo Giovannini

Universidad Nacional del Litoral
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
engiovannini@conicet.gov.ar

Abel Lassalle Casanave

Universidade Federal da Bahia
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
abel.lassalle@gmail.com

Paulo A. S. Veloso
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
pasveloso@gmail.com

Abstract

This paper analyzes the theory of area developed by Euclid in the *Elements* and its modern reinterpretation in Hilbert's influential monograph *Foundations of Geometry*. Particular attention is bestowed upon the role that two specific principles play in these theories, namely the famous common notion 5 and the geometrical proposition known as De Zolt's postulate. On the one hand, we argue that an adequate elucidation of how these two principles are conceptually related in the theories of Euclid and Hilbert is highly relevant for a better understanding of the respective geometrical practices. On the other hand, we claim that these conceptual relations unveil interesting issues between the two main contemporary approaches to the study of area of plane rectilinear figures, i.e., the geometrical approach consisting in the geometrical theory of equivalence and the metrical approach based on the notion of measure of area. Finally, in an appendix logical relations among equivalence, comparison and addition of magnitudes are examined schematically in an abstract setting.

Keywords: Euclid, Hilbert, plane area, common notion 5, De Zolt's postulate.

1. Introducción

La teoría del área ocupa un lugar central en la construcción de la geometría plana llevada a cabo por Euclides en los primeros seis libros de *Elementos*. Ello se aprecia no sólo en el hecho de que Euclides desarrolla, especialmente en los libros I y VI, el primer tratamiento sistemático en la geometría griega del concepto de área de una figura rectilínea plana, sino también porque las proposiciones sobre el área resultan esenciales para la construcción de otras partes de la teoría. Por mencionar sólo un par de ejemplos, la teoría del área es utilizada por Euclides en el libro IV en la construcción de un pentágono regular y en el libro VI para probar las proposiciones VI.1 y VI.2, que constituyen la base para la construcción de la teoría de los triángulos semejantes.

Un rasgo central de la estrategia empleada por Euclides para el estudio de las áreas es la ausencia de todo tipo de consideraciones métricas, especialmente, del concepto de medida de área. Euclides desarrolla una teoría de la *comparación de áreas*, no una teoría de la medida de áreas.[1] En dicha teoría de la comparación de áreas las *nociones comunes* cumplen un papel fundamental. En efecto, el método que introduce Euclides para establecer la 'igualdad de área' o equivalencia de un par de figuras planas consiste en sumar y quitar figuras respectivamente congruentes, operaciones que respetan las *propiedades* de la 'igualdad' establecidas en las nociones comunes.[2] Así, por ejemplo, sabemos gracias a las nociones comunes 2 y 3 que la suma y diferencia de figuras iguales (en área) da como resultado figuras iguales (en área). Esta aplicación de las nociones comunes encuentra su justificación en el hecho de que Euclides trata a los polígonos planos como una clase de magnitudes geométricas, es decir, como aquellos 'entes' o 'cosas' de los que hablan *también* las nociones comunes.

Es particularmente interesante el papel que desempeña la noción común 5 – "Y el todo es mayor que las partes" – cuando se la aplica en el contexto de las proposiciones que tratan de las áreas poligonales. En efecto, la NC 5 establece que todo polígono es mayor en área que cada una de sus partes poligonales; en consecuencia, la NC 5 constituye un criterio que resulta fundamental para establecer la *desigualdad en área* de un par de figuras rectilíneas planas, y por lo tanto, para *comparar* áreas de polígonos. La noción común 4 – "Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí" – es el criterio para igualdad, perfectamente adecuado para segmentos y ángulos congruentes, y por extensión

[1] Resulta oportuno aquí introducir una distinción conceptual y terminológica. En este trabajo utilizaremos el término 'área' de un modo general para referirnos a la *cantidad de superficie* de un polígono (simple) en el plano. Más precisamente, si la superficie o *extensión superficial* es la *magnitud* correspondiente a los polígonos planos, la *cantidad de esta magnitud* se denomina área. Por 'magnitud' entenderemos aquí por tanto a la cualidad común que hace que los elementos de una determinada especie o clase de objetos geométricos sean igualables y sumables. Del mismo modo, diremos que todos los elementos iguales entre sí tienen la misma cantidad de esta magnitud. En otras palabras, la *cantidad* es lo que tienen en común los elementos iguales entre sí, mientras que la *magnitud* es el carácter común correspondiente a todos los objetos geométricos de una misma especie o clase. Sobre esta distinción véase Puig Adam 1980. Por otro lado, las distinciones terminológicas aquí adoptadas intentan reflejar la terminología utilizada en *Fundamentos de la geometría* (1899) de Hilbert. En efecto, en dicha obra se distingue consistentemente entre los conceptos de "superficie" o "extensión superficial" [*Fläche*], "área" [*Flächeninhalt*] en el sentido general recién descripto y "medida de área" [*Flächenmass*].

[2] Como es bien conocido, la igualdad tiene en Euclides al menos tres sentidos: como identidad, como congruencia entre figuras geométricas, y finalmente como relación entre áreas (de, inclusive, figuras no congruentes).

para figuras congruentes, pero que no tiene serventía para la igualdad de áreas de figuras que no lo fuesen, así como la NC 5 tampoco lo tiene si una figura no es de hecho parte de otra.

Ahora bien, hacia fines del siglo XIX, la teoría del área desarrollada por Euclides, especialmente las proposiciones que tratan de las áreas planas en los libros I y VI, fue objeto de un intenso estudio. Un punto culminante de estas indagaciones fue la publicación de *Fundamentos de la geometría* de David Hilbert en 1899. En esta obra no sólo se encuentra una de las primeras presentaciones de la teoría del área en el marco de una teoría axiomática abstracta, sino que además se busca proporcionar allí un nuevo fundamento lógicamente sólido y puramente geométrico para la 'teoría de la equivalencia geométrica', como era designada en esta época la teoría del área de Euclides. Un elemento central de esta tarea suponía para Hilbert proporcionar una prueba del llamado 'postulado de De Zolt', que afirma que si un polígono es descompuesto en partes poligonales de un modo cualquiera, entonces no es posible recomponer a todas estas partes poligonales *menos una* en otro polígono equivalente con el polígono original. Ciertamente, si en un polígono la parte fuese equivalente con el todo, los polígonos no podrían ser ordenados por equivalencia. Por esa razón, el postulado de De Zolt era señalado por los geómetras de la época como la versión "matemáticamente precisa", para las áreas poligonales, de la NC 5.

La recepción contemporánea de la teoría euclidiana del área, en particular la de Hilbert, pone en evidencia que un problema central consistía en explicar cómo se procede a *ordenar linealmente* a los polígonos planos según sus 'áreas'.[3] Hay dos versiones para ese problema. En el caso en que el área poligonal fuese identificada con su medida, expresada como un número real (positivo), el problema sería trivialmente resuelto; por el contrario, en el contexto de la teoría de la equivalencia, este problema se traduce en la pregunta acerca de cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para ordenar linealmente a los polígonos planos exclusivamente sobre la base de la relación de 'equivalencia geométrica'. El hilo conductor de este trabajo será el examen del mencionado problema en su segunda versión, pero sin perder de vista su conexión con la primera versión.

En la segunda sección presentaremos la teoría del área de acuerdo con la exposición de *Elementos*, con especial referencia al papel de la NC 5. En la tercera sección, con especial referencia a las nociones hilbertianas de "equivalencia", expondremos la teoría del área de acuerdo con *Fundamentos*, teoría que Hilbert veía como el desarrollo riguroso de la de Euclides. Hablaremos de la teoría *de* Euclides, de la teoría *de* Hilbert, de la reconstrucción de la teoría de Euclides *dentro de* la teoría de Hilbert para destacar que se trata de prácticas matemáticas diferentes. En el ámbito restricto de la teoría de área,

---

[3] Un conjunto P se dice que está ordenado *total o linealmente* si, *para todo* par de elementos a y b no iguales del conjunto, se tiene que:

$$a < b \text{ o } a > b.$$

O de un modo equivalente, *para todo* par de elementos a y b, se cumple que:

$$a < b \quad \text{o} \quad a > b \quad \text{o} \quad a = b.$$

Para una teoría de magnitudes se asume la validez de la ley de tricotomía (orden lineal).

nuestro artículo tiene por objetivo elucidar los cuadros conceptuales respectivos, así como los supuestos que operan en la reinterpretación de Euclides por parte de Hilbert. Algunos apuntes sobre esa elucidación se encuentran en la cuarta sección, específicamente considerando la relación entre la NC 5 y el postulado de De Zolt.

2. La práctica euclidiana: la teoría del área en *Elementos*

El desarrollo de Euclides de la teoría del área de las figuras rectilíneas planas comienza en la proposición I. 35 de *Elementos,* que afirma lo siguiente[4]:

> *I.35. Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.*

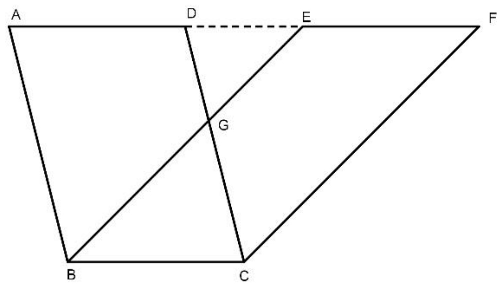

Figura 1: *Elementos* I.35

Como se aprecia en el diagrama que acompaña la demostración, Euclides demostrará aquí que los paralelogramos *ABCD* y *EBCF* son iguales, aunque claramente dichas figuras no son congruentes. Euclides introduce en esta proposición un nuevo concepto de igualdad, que difiere del utilizado en las proposiciones precedentes, según el cual el término igualdad designaba fundamentalmente la relación de *congruencia* referida a segmentos lineales, ángulos y triángulos. En efecto, en esta proposición la relación igualdad adquiere un nuevo sentido que hoy identificamos con el concepto de igualdad de área.
La demostración euclidiana procede esquemáticamente de la siguiente manera: puesto que *ABCD* es un paralelogramo, el segmento *AD* es igual al segmento a *BC* (I.34); por la misma razón, el segmento *BC* es igual al segmento a *EF*. Ahora bien, si a los segmentos *AD* y *EF* se les añade el segmento común *DE,* entonces de allí resultan los segmentos *AE* y *DF*, iguales entre sí (NC 2). Y dado que *AB* es igual a *DC* (I.34), los segmentos *AB* y *AE* son respectivamente iguales a los segmentos *DC* y *DF*. A su vez, puesto que *AB* y *DC* son paralelos, el ángulo *FDC* es igual al ángulo *EAB*, es decir, el ángulo exterior al ángulo interior (I.29). Luego, el segmento *EB* es igual al segmento *FC*, es decir, el triángulo *EAB*

[4] En la Proposición I. 34 Euclides demuestra que en todo paralelogramo los lados y ángulos opuestos son congruentes, y la diagonal lo divide en dos partes congruentes. Dicha proposición constituye además el primer lugar en donde Euclides debe mencionar a los paralelogramos. Luego, aunque la expresión utilizada por Euclides es "áreas de paralelogramos", es claro que esta proposición no trata de la teoría del área en el sentido por nosotros especificado, es decir, de la igualdad de área o equivalencia de un par de figuras rectilíneas cualesquiera (no necesariamente congruentes). Sobre el uso de Euclides del término 'área de paralelogramos' véase Heath 1956.

es igual (congruente) al triángulo *FDC* (I.4). Ahora bien, si a estos triángulos iguales (congruentes) se les quitan el mismo triángulo *DGE*, entonces de allí resultan los trapecios *ABGD* y *EGCF*, que serán iguales (en área) (NC 3). Pero del mismo modo, si a estos trapecios iguales (en área) se les añade el mismo triángulo *BCG*, entonces de allí resultan los *ABCD* y *EBCF* iguales (en área) entre sí (NC 2), que es lo que se quería probar.

La estrategia que utiliza Euclides para demostrar la igualdad de área de los paralelogramos consiste en *sumar y quitar* figuras congruentes en parejas, operaciones que justifica en las propiedades de la igualdad establecidas en las nociones comunes. Más aún, tal como ocurre con la relación de congruencia, en ningún momento Euclides proporciona una definición explícita de esta relación de igualdad de área, de donde se sigue que su procedimiento en el estudio de las áreas planas consiste en introducirla como una *relación no definida*, que satisface el conjunto de propiedades enunciadas en las nociones comunes. La aplicación sistemática de las nociones comunes en el estudio de las áreas de las figuras rectilíneas planas se funda en la *suposición básica* de que éstas constituyen una clase de magnitudes geométricas. Desde el punto de vista contemporáneo, que los polígonos planos constituyen una clase de magnitudes geométricas significa que se puede establecer para ellos una operación de *suma* y que pueden ser *comparados*, es decir, que se puede definir para ellos una relación de igualdad y desigualdad, tal que se cumple la ley de tricotomía.

Otro aspecto importante del procedimiento de Euclides reside en el hecho de que las nociones comunes permiten considerar la presencia de dos criterios diferentes, en función de los cuáles es posible establecer la igualdad de área de un par de figuras geométricas planas. Por un lado, las nociones comunes 2 y 4 permiten inferir que un par de figuras son iguales en área cuando son obtenidas por medio de la operación de *sumar* figuras congruentes en parejas. En cambio, las nociones comunes 3 y 4 permiten derivar la igualdad de área a partir de la operación de *quitar* figuras respectivamente congruentes a un par de figuras iguales en área. Es dable mencionar que Euclides no sólo no discrimina entre estos dos criterios para establecer la igualdad de área, sino que además los utiliza simultáneamente en muchas demostraciones. El caso que hemos visto recién de la demostración de la proposición I.35 es un ejemplo evidente.

Si en la Proposición I. 35 Euclides establece que paralelogramos que están sobre la misma base y sobre la misma paralela son iguales (en área) entre sí, en la Proposición 1.36 establece la igualdad de área de un par de paralelogramos en el caso en tengan bases iguales y se encuentre entre las mismas paralelas, es decir, tengan igual altura. Asimismo, I.37 y I.38 son las proposiciones correspondientes a las dos anteriores para el caso de que las figuras sean dos triángulos. Sin embargo, en las dos proposiciones siguientes se introduce una novedad, a saber, que triángulos iguales en área que están sobre la misma base y del mismo lado están entre las mismas paralelas (Proposición I.39) y que triángulos iguales en área que están sobre bases iguales y del mismo lado, están también entre las mismas paralelas (Proposición I. 40). En ambos casos, se busca probar que los triángulos tienen la misma altura. Para demostrarlas, Euclides utiliza por primera vez en el contexto de los teoremas sobre la igualdad de área la NC 5: “Y el todo es mayor que la parte”.

> I.39 *Los triángulos iguales que están sobre la misma base y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas.*

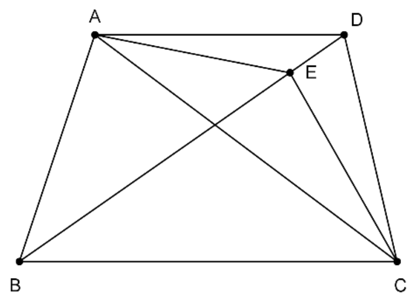

Fig 2.

La prueba de Euclides es indirecta o por el absurdo. Sean *ABC* y *DBC* los dos triángulos de igual área que están sobre la misma base *BC* (Fig. 2). Debemos probar que *BC* es paralela a *AD* (Fig. 2). Pues supongamos que *AD* no es paralela a *BC*. Sabemos entonces que posible trazar desde *A* una recta paralela a BC (I.31), que llamamos *AE*. Luego, el triángulo *ABC* es igual (en área) al triángulo *EBC*, pues tienen la misma base y están en entre las mismas paralelas (I.37). Dado que *ABC* es igual (en área) a *DBC*, *DBC* debe ser igual (en área) a *EBC* (N.C.1). Pero ello no es posible, puesto que en ese caso el mayor (*DBC*) sería igual (en área) a la parte (*EBC*), lo cual es contradictorio. Hemos probado así que *AE* no es paralela a *BC*. Siguiendo el mismo razonamiento se puede probar que cualquier otra recta trazada desde *A*, distinta de *AD*, no es paralela a *BC*; por lo tanto, *AD* es paralela a *BC*.

En lo que se refiere a la teoría del área, Euclides apela a la NC 5 en todas aquellas proposiciones en las que debe probar, partiendo de la hipótesis de la igualdad en área de un par de figuras, algo que implica la congruencia de segmentos y ángulos en la figura. Ello significa que mientras que las nociones comunes 2 a 4 permiten determinar la igualdad en área de un par de figuras rectilíneas planas, la NC 5 introduce un *criterio de desigualdad*. Dicho criterio puede ser formulado de la siguiente manera: dados dos polígonos planos, si uno es parte propia del otro, entonces éste es *mayor* en área que aquél. O de un modo equivalente: decimos que el polígono P es menor que el polígono Q, si existe un polígono P’ igual en área que P, tal que P’ está contenido (propiamente) en Q. Luego, la noción común 5 resulta esencial para la introducción de una relación de desigualdad para polígonos, en tanto que excluye la posibilidad de que si P es parte de Q, entonces P sea igual en área a Q.

Ahora bien, es oportuno comentar el modo en que Euclides aplica la NC 5 en este contexto de las demostraciones que involucran la igualdad de área de figuras rectilíneas planas. Un aspecto que se aprecia claramente en la demostración que hemos visto de I.39 es que la inferencia de la *desigualdad en área* entre las figuras dadas requiere tanto de la condición expresada en la NC 5 como de la información extraída en los diagramas. Mientras que el hecho de que un triángulo es *parte* del otro es inferido de la configuración particular de puntos y líneas exhibida en el diagrama que acompaña a la información, la NC 5 es la que permite concluir que los triángulos son desiguales; es decir, en el caso de la NC 5, su papel de enlace diagrama-texto se manifiesta claramente en demostraciones por el absurdo, pues permite pasar de la relación diagramática 'ser parte de' a 'ser menor que (desigual)'.[5] La demostración de la Proposición I. 40 procede también por absurdo, apoyándose esencialmente en la NC 5.

Un comentario adicional lo merece la Proposición I.41, que afirma lo siguiente:

I.41 *Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, entonces el paralelogramo es el doble que el triángulo.*

Para probar esta proposición, Euclides se apoya fundamentalmente en la igualdad de área de triángulos con bases y alturas iguales demostrada en I.37. El aspecto interesante de esta proposición que quisiéramos destacar es que de ella se sigue un corolario inmediato, que Euclides no llega a enunciar, pero que ocupará un lugar importarte en el desarrollo posterior de la teoría de la equivalencia: "Todo triángulo es igual (en área) a un paralelogramo con la misma base y altura mitad". La Proposición I. 41 y su corolario permitirían probar inmediatamente con un abordaje diferente las fórmulas para la medida de triángulos, pero de manera consistente con su enfoque Euclides compara las áreas de triángulos y paralelogramos.[6]

En suma, en primer lugar, la estrategia fundamental de Euclides consiste así en fundar la teoría del área de los polígonos planos en la relación de igualdad de área, noción puramente geométrica basada en la congruencia de figuras. Esencial en esta estrategia resulta el hecho de que las operaciones de suma y diferencia de polígonos respetan las propiedades de la igualdad establecidas en las nociones comunes, con especial referencia a la NC 5.

En segundo lugar, en ningún momento en *Elementos* se asignan longitudes o se miden segmentos de rectas, del mismo modo que no se asignan amplitudes o se miden ángulos. Esta estrategia de desarrollar el estudio de las magnitudes geométricas sobre la base de una teoría de la comparación, y no de una teoría de la medida, obedece a múltiples y

---

[5] Esta relación colaborativa entre diagrama y texto se encuentra inmediatamente ligada al esquema conceptual desarrollado por Manders (2008), particularmente a la distinción entre propiedades 'exactas' y 'co–exactas'. Véase *infra*.

[6] Por *more* de completud, mencionamos que en las proposiciones siguientes del libro I, esto es, I.42 y I.44-46, Euclides resuelve algunos problemas sobre las áreas planas conocidos como "la aplicación de áreas". Dichos problemas consisten en encontrar un polígono (un paralelogramo, un triángulo, etc.) igual en área a otro polígono dado, a partir de un segmento y un ángulo dado. El libro II está dedicado íntegramente a problemas de área plana. Euclides presenta allí un conjunto de proposiciones sobre la relación entre segmentos lineales y áreas poligonales. Asimismo, en el libro III, que trata sobre la teoría de la circunferencia, se encuentran algunas proposiciones donde los resultados sobre el área plana alcanzados previamente resultan fundamentales, por ejemplo, III.35 y III.38.

profundas razones, de las cuales se pueden mencionar esquemáticamente las siguientes: i) las dificultades conceptuales ocasionadas por el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, y su resolución a través del desarrollo de una teoría general de las proporciones que pueda tratar con magnitudes tanto conmensurables como inconmensurables; ii) la ausencia de un concepto general y abstracto de número que pueda ser aplicado para medir magnitudes geométricas de cualquier tipo; iii) las restricciones conceptuales ligadas al *principio de homogeneidad*, según el cual sólo se puede operar con y comparar *magnitudes de un mismo tipo o clase*. Euclides construye la *suma iterada de segmentos*, lo que puede pensarse como la operación de multiplicar un segmento por un número entero, pero no como el producto entre dos segmentos cualesquiera. Ello significa que, en la teoría geométrica en el plano desarrollada por Euclides, no hay lugar para pensar en las fórmulas de medida de área de triángulos, rectángulos, paralelogramos, etc.

Así, la propuesta de Euclides consistía, por el contrario, en construir la teoría del área de los polígonos planos estrictamente sobre la noción puramente geométrica de igualdad de área, sin referencia a la noción de medida de área. Como veremos en lo que sigue, éste es uno de los problemas epistemológicos y metodológicos fundamentales, aunque no siempre advertido expresamente, detrás de la construcción de la teoría del área en el plano llevada a cabo por Hilbert en *Fundamentos*.

3. La práctica hilbertiana: la teoría del área en *Fundamentos*

Hilbert se ocupa de desarrollar la teoría del área para las figuras rectilíneas planas en el capítulo IV de *Fundamentos*. Aunque en el contexto de dicha monografía el significado de aquel capítulo no se destaca especialmente, sabemos que para Hilbert sus contribuciones a la teoría del área poligonal cumplían un papel central en la *fundamentación* de la geometría elemental: una adecuada construcción de la teoría del área, en donde se evite la introducción de supuestos numéricos y en lo posible de continuidad, resultaba esencial para su proyecto de proporcionar una *base independiente o puramente geométrica* para la geometría elemental.

Otro rasgo de la teoría del área desarrollada por Hilbert resulta digno de mencionar: se trata de la única sección de *Fundamentos* en donde Hilbert menciona explícita y reiteradamente a Euclides, o mejor, se trata de la única parte de la teoría geométrica elaborada por Hilbert que intenta reconstruir expresamente "la teoría de Euclides":

> La teoría de las proporciones discutida en el Capítulo III y la aritmética de segmentos introducida allí permiten *desarrollar la teoría del área de Euclides* con la ayuda de los axiomas antes mencionados[7], i.e., desarrollarla en el plano y con independencia de los axiomas de continuidad. (Hilbert 1971: 60)

Hilbert intenta así *fundar* inicialmente el concepto de área plana sobre la base de la noción de *equivalencia*. En cuanto a la caracterización del concepto de *equivalencia*, una novedad de la teoría hilbertiana consiste en distinguir dos conceptos diferentes, a saber:

[7] Hilbert se refiere aquí a los axiomas I, 1-3 y II-IV.

la relación de "equidescomposición" [*Zerlegungsgleichheit*] y la relación de "equicomplementariedad" [*Ergänzungsgleichheit*].[8]

Definición. Dos polígonos simples se llaman *equidescomponibles* cuando se pueden descomponer en un número finito de triángulos, los cuales son congruentes entre sí por parejas.

Definición. Dos polígonos simples *P* y *Q* se llaman *equicomplementarios* cuando se les puede agregar un número finito de parejas de polígonos *equidescomponibles P'*, *Q'*; *P''*, *Q''*; … ; *P'''*, *Q*, tal que los polígonos resultantes *P* + *P'* + *P''* + … + *P'''* y *Q* + *Q'* + *Q''* + … + *Q'''* sean equidescomponibles.[9]

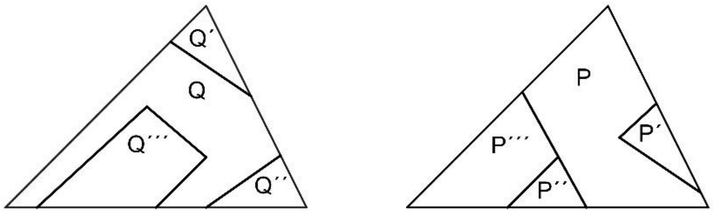

Figura 3: Polígonos equicomplementarios.

La relación que Hilbert llama aquí 'equidescomposición' había sido sugerida previamente por Gerwien (1833) y definida de un modo más preciso por Duhamel (1878).[10] Con su definición, este último pretendía que la igualdad de área como equivalencia de un par de figuras se funde exclusivamente en un *único* criterio, a saber: la posibilidad de que dichas figuras puedan ser obtenidas por medio de la operación de *sumarles* pares de figuras respectivamente congruentes. La relación de equidescomposición o *equivalencia por suma*, como también era conocida en esta época esta noción, establecía que la 'propiedad de la igualdad' expresada en la noción común 2 de Euclides constituía el único criterio válido para determinar la igualdad de área de dos figuras. Por el contrario, con su noción de 'equicomplementariedad', Hilbert incorpora en su teoría el criterio que determina la igualdad de área de un par de polígonos sobre la base de exhibir que tales figuras son el resultado de efectuar la operación de *quitarles* pares de polígonos respectivamente congruentes a otro par de polígonos iguales en área;

[8] Las expresiones "equivalencia por descomposición" y "equivalencia por adición (o complementación)" representan traducciones alternativas para los términos en alemán "*zerlegungsgleichheit"* y *"ergänzungsgleichheit",* respectivamente. En aras de brevedad, nos hemos inclinado aquí por las variantes "equidescomposición" y "equicomplementariedad", solución que adopta también J. M. Sánchez Ron en su traducción al castellano de *Fundamentos de la geometría* (1996).

[9] Hilbert 1971: 70. Hilbert introdujo el término "equidescomposición" [*Zerlegungsgleichheit*] en la segunda edición de *Fundamentos*, en 1903; en la primera edición utiliza en cambio el término "igualdad de superficie" [*Flächengleichheit*]. Por otro lado, la expresión "equicomplementariedad" [*Ergänzungsgleichheit*] aparece por primera vez en la séptima edición, en 1930. En las ediciones anteriores emplea la expresión "igualdad de contenido" [*Inhaltsgleichheit*].

[10] Un estudio histórico sobre el surgimiento de las nociones de "equidescomposición" y "equicomplementariedad" se encuentra en Volkert 1999. Para una contextualización histórica de las contribuciones de Hilbert a la teoría del área plana, véase Giovannini (en prensa).

en la teoría de Euclides, este criterio de igualdad de área se basa en la aplicación de la noción común 3. Por esta razón, la relación de equicomplementariedad era también conocida como *equivalencia por diferencia*.[11] Sin embargo, en su sentido estricto, la relación de equicomplementariedad *combina* ambos criterios de igualdad de área. Los polígonos P y Q son equicomplementarios si se obtienen de sustraer pares de figuras rectilíneas planas congruentes en parejas *a un par de polígonos equidescomponibles* o equivalentes por suma.

Esta combinación de criterios de igualdad de área en la relación de equicomplementariedad permiten explicar el hecho de que, en sus cursos de geometría, Hilbert repite con insistencia que se trata de la noción de equivalencia operante en la teoría de Euclides. Sirva como ejemplo el siguiente pasaje, perteneciente a un curso impartido en 1917:

> Si con estas definiciones [*Begriffsbildungen*] pasamos a considerar los teoremas de la geometría elemental sobre la igualdad de área, y los problemas de construcción vinculados con ellos, entonces encontraremos que se trata aquí siempre de la equicomplementariedad de las figuras. Por ejemplo, el teorema que afirma que dos paralelogramos, e incluso dos triángulos, con bases y alturas iguales son equivalentes, [el teorema] según el cual a todo polígono le corresponde un triángulo de igual área, como así también el teorema de Pitágoras; todos [estos teoremas] son demostrados en el sentido en que se reconoce la *equicomplementariedad* de los polígonos en cuestión. La deducción de todos estos teoremas es llevada a cabo por completo sin la aplicación de consideraciones de continuidad. (Hilbert 1917, p.89)[12]

A pesar de la semejanza explícita que Hilbert quiere establecer entre su propia teoría y la teoría del área de Euclides, debemos señalar que se trata de *prácticas* diferentes, esto es, de una *reconstrucción* de una teoría *dentro* de otra teoría; ello se vuelve manifiesto cuando se repara en la naturaleza esencialmente disímil de las nociones comunes de Euclides y los axiomas de Hilbert. Mientras que las nociones comunes en Euclides son pensadas, para utilizar la terminología de Aristóteles, como *principios comunes* que valen para diferentes géneros de entidades, en Hilbert deben ser vistas como principios (o proposiciones derivadas) *propiamente geométricos*. Así, por ejemplo, una vez determinado que dos segmentos son respectivamente iguales (por construcción) a un tercero *qua* radios de círculos, entonces Euclides emplea la NC 1 para inferir que tales segmentos son iguales entre sí. En Hilbert, en cambio, hay un axioma de existencia[13] que afirma para cualquier segmento que hay uno congruente en la misma o en diferente recta,

[11] Sobre estas designaciones alternativas véase Amaldi 1900.

[12] "Gehen wir mit diesen Begriffsbildungen an die Betrachtung der elementar-geometrischen Sätze über Flächengleichheit und der damit zusammenhängenden Konstruktions-Aufgaben, so finden wir, dass es sich hier immer um die Ergänzungsgleichheit der Figuren handelt. Die Sätze z. B., dass zwei Parallelogramme und ebenso zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe einander gleich sind, dass sich zu jedem Polygon ein Dreieck von gleicher Fläche bestimmen lasst, sowie auch der Pythagoräische Lehrsatz werden alle in dem Sinne bewiesen, dass die Ergänzungsgleichheit der betreffenden Polygone erkannt wird. Die Herleitung aller dieser Sätze geschieht vollkommen ohne Anwendung von Stetigkeits-Betrachtungen."

[13] Cf. Hilbert 1971: 10. Axioma III.1.

y no como en Euclides una construcción de segmentos congruentes con un segmento dado, sea para "poner" dos segmentos iguales a un segmento dado configurando un triángulo equilátero (Proposición I.1), sea para "poner" un segmento igual a un segmento dado en un punto (Proposición I.2), sea para "poner" un segmento igual a un segmento dado sobre un segmento mayor (Proposición I.3). Además, hay otro axioma que establece la transitividad de esa congruencia entre segmentos, un axioma geométrico, cuyo aire de familia con la NC 1 no debería hacer olvidar que ésta se aplica a construcciones previamente realizadas.[14] En Euclides las nociones 2 y 3 para segmentos se aplican en condiciones semejantes, pues se construyen las operaciones de quitar (Proposición I.3) y de sumar (una fácil variación de la prueba de I.3). En Hilbert, por ejemplo, un axioma (III.3) garantiza la existencia del segmento suma.[15]

Obsérvese además que en Euclides la aplicación de la NC 4 aparece en un caso singular, a saber, el de la sospechosa demostración por superposición de la congruencia entre triángulos usualmente denominada "lado-ángulo-lado" (la Proposición I.4). El problema reside, justamente, en que Euclides no tiene un criterio de congruencia por construcción para ángulos iguales como tiene para segmentos iguales, papel que cumplirá a seguir la Proposición I.4. La proposición I.23 permite – previamente demostrada la Proposición I.22 (con auxilio de I.4) que autoriza construir un triángulo con tres rectas iguales a tres rectas dadas bajo la condición de que dos rectas cualesquiera tomadas juntas sean mayores que la restante – construir (poner) un ángulo rectilíneo igual a un ángulo dado sobre cualquier recta dada y en uno de sus puntos. En Hilbert hay un axioma (III. 5) que permite derivar la congruencia lado-ángulo-lado, así como otro axioma (III.4) afirma la existencia de triángulos congruentes.[16]

Ahora bien, ¿cuál es el criterio para igualdad de áreas entre polígonos en general? En la teoría de Euclides, consiste en las operaciones de composición y descomposición de un par de polígonos en un número finito de figuras congruentes de a pares, *operaciones que constituyen un criterio constructivo*. Sin embargo, cabe observar aquí lo siguiente: aunque supiéramos de esta manera cuando dos polígonos son iguales en área, no está por eso caracterizada la construcción de sumar o de quitar áreas de polígonos en general; intuitivamente, los polígonos en cuestión podrían no tener lados congruentes como para, por ejemplo, sumarlos. Esta última situación debe por lo tanto distinguirse del caso en el que al efectuar las operaciones de sumar y quitar polígonos congruentes *se parte de un polígono dado*, tal como procede Euclides en la Proposición I.35. En este caso, sumar o quitar polígonos es una operación "interna" relacionada con las partes de un todo poligonal.

Cuando Hilbert intenta *fundamentar* inicialmente el concepto de área plana sobre la base de la noción de *equivalencia*, y no de la *medida de área*, proporciona definiciones de las nociones de *descomposición* y *composición* o *suma de* polígonos *simples*[17], remplazando

[14] Cf. Hilbert 1971: 11. Axioma III.2.
[15] Cf. Hilbert 1971: 12. Axioma III.3.
[16] Euclides también usa superposición en la Proposición I.8, la congruencia de triángulos lado-lado-lado, que se sigue también del axioma de Hilbert.
[17] Se llama *simple* a todo polígono en el que todos los vértices son distintos unos de otros, ningún vértice cae en un lado y dos lados cualquiera no tienen entre sí punto común.

por la tanto la definición habitual de suma de polígonos como mera yuxtaposición o reunión de polígonos[18]:

Definición: Si se unen dos puntos de un polígono simple *P* por medio de un segmento poligonal cualquiera formado enteramente por puntos interiores al polígono y que no tiene puntos dobles, se obtienen dos nuevos polígonos simples P_1 y P_2, cuyos puntos interiores se encuentran en el interior de *P*. Diremos entonces que *P se descompone en* P_1 y P_2 o que *P1* y *P2 componen* (suman) a *P*.[19]

Nótese que lo que se define aquí es la igualdad $P = P_1 + P_2$, y no simplemente el polígono suma $P_1 + P_2$. Como se ha indicado, ello se explica, al menos en parte, en virtud de que la suma de dos polígonos cualesquiera no existe siempre *necesariamente*, puesto que hay polígonos que no pueden ser *yuxtapuestos*, es decir, cuyos contornos (o lados) no pueden tener ningún punto común sin interferir los recintos. Las definiciones anteriormente dadas de equidescomponibilidad y equicomplementariedad dependen, como de inmediato se percibe, de la definición de suma "interna".

Ahora bien, por un lado, de las respectivas definiciones de 'equidescomposición' y 'equicomplementariedad' se sigue inmediatamente que ambas son relaciones reflexivas y simétricas; la validez de la propiedad transitiva (la NC 1, pero no "aplicada" a construcciones) no resulta en cambio tan inmediata, sino que requiere de una demostración, que Hilbert desarrolla de un modo esquemático.[20] Por otro lado, surge naturalmente aquí la pregunta respecto de si dichas relaciones son equivalentes. En verdad, el problema se origina con una demostración alternativa de la Proposición I.35 que procede únicamente por el criterio de *equivalencia por suma*, pero no por el uso simultáneo de los criterios de *equivalencia por suma y diferencia*.[21] La idea de esta demostración alternativa consiste en descomponer a los dos paralelogramos en el mismo número de polígonos respectivamente congruentes, tal como es sugerido en el siguiente diagrama (figura 3)

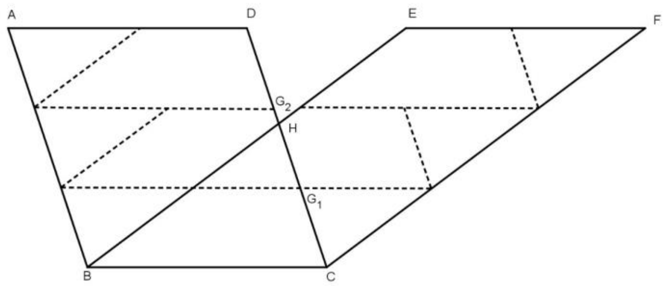

Figura 3: Prueba alternativa de la Proposición I.35

[18] La definición de polígonos como mera yuxtaposición o reunión de polígonos se encuentra en la mayoría de los manuales de geometría de la época, tales como Enriques y Amaldi (1903) y Faifofer (1892). Stolz (1880) también utiliza una definición similar.
[19] Hilbert 1971: 60.
[20] Cf. Hilbert 1971: 61.
[21] Sobre esta demostración véase Duhamel 1878: 445.

Es claro que en esta demostración alternativa hay que apelar al Axioma de Arquímedes (o de medida)[22], puesto que dicho procedimiento se basa fundamentalmente en la posibilidad de subdividir un segmento dado en un número cualquiera de partes con la misma longitud, es decir, de segmentos congruentes. Un resultado que el propio Hilbert consideró como una contribución particularmente importante de su teoría revela que aquellas relaciones son lógicamente equivalentes *sólo* si se asume el axioma de Arquímedes. Utilizando su conocida técnica de construcción de 'modelos' de los axiomas geométricos, Hilbert probó que en toda geometría no–arquimedeana es posible que un par de triángulos con bases y alturas congruentes sean equicomplementarios, pero no equidescomponibles. Más precisamente, dicha prueba consistía en construir un par de triángulos cuyas bases y alturas respectivamente congruentes eran iguales a un *segmento no–arquimediano e*, para luego mostrar que si bien dichos triángulos eran equicomplementarios, de la suposición de que también eran equidescomponibles se seguía una contradicción.[23] La presencia de *dos* conceptos de equivalencia en la teoría de Hilbert obedece, en gran medida, a su objetivo metodológico central de reconstruir la mayor parte posible de la geometría elemental prescindiendo de los axiomas de continuidad, especialmente del axioma de Arquímedes.

4. El Postulado de De Zolt y la NC 5

Las relaciones que venimos trazando entre las teorías de las áreas de Euclides y Hilbert requieren que nos ocupemos del papel de la NC 5 en la primera y su "tratamiento riguroso" en la segunda a través del postulado o axioma de De Zolt. Como hemos mencionado en la Introducción, dicho principio fue propuesto en 1882 por el matemático italiano Antonio De Zolt (1847–1926), y en su versión original afirma lo siguiente: "Si un polígono es dividido en partes de un modo cualquiera, no es posible, prescindiendo de una de esas partes, disponer las restantes de modo tal que cubran enteramente el polígono" (Zolt 1882, p. 12). Pero la NC 5 permite ilustrar un aspecto de las teorías de Euclides y Hilbert que no hemos todavía considerado, a saber, el rol en la justificación de algunos pasos demostrativos de los diagramas en la primera que la segunda exige dispensar (por el agregado de los axiomas necesarios).

En las demostraciones de Euclides, relaciones parte/todo presentes en el diagrama son reformuladas en términos de la relación ser menor por la NC 5. Su uso más señalado se encuentra en demostraciones por absurdo, como es el caso de la Proposición I.39, aunque cabe señalar que para esas demostraciones basta con establecer la desigualdad entre segmentos, ángulos o áreas con vistas a explicitar una contradicción cuyo segundo término es obtenido vía argumentación textual.[24] De acuerdo con Manders (2008), relaciones parte/todo son invariantes bajo deformación, lo cual justifica su uso *legítimo* en una demostración euclidiana. Esas atribuciones, que dependen del diagrama, son denominadas co–exactas por Manders, y son distinguidas de las atribuciones exactas – que segmentos o ángulos sean, por ejemplo, iguales – y que son justificadas textualmente. Desde esta perspectiva, la NC 5 puede ser vista como una pieza de la cooperación

[22] En su versión usual, el axioma de Arquímedes afirma que si un segmento a es menor que otro segmento b, entonces existe un número natural n tal que $na > b$.
[23] Cf. Hilbert 1971: 62–63.
[24] Véase Lassalle Casanave y Seoane (2016).

diagrama/texto que presupone una demostración heterogénea, esto es, que comporta la cooperación del medio de representación diagramático y del verbal.

La distinción entre exactos y co–exactos no es equivalente a la distinción entre expresiones que son igualdades y desigualdades (estrictas). En efecto:

> En la medida en que atributos exactos son expresables por igualdades y co-exactos por desigualdades, se podría esperar que un diagrama inapropiado en relación con sus aspectos co-exactos no podría llevar a conclusiones exactas inapropiadas: desigualdades estrictas no implican igualdades no triviales. Desafortunadamente, ambas afirmaciones son falsas. Algunas relaciones ecuacionales son co-exactas y apropiadamente leídas de relaciones topológicas en el diagrama: inclusiones en un diagrama autorizan afirmar que el todo (región, ángulo, línea) es igual a la suma de sus partes disyuntas. (Manders 2008, p. 94)

Ahora bien, que las partes sean menores que el todo y que la suma de partes de un todo sea igual al todo *no son afirmaciones en principio equivalentes*. En axiomatizaciones de los *Elementos* en curso durante el siglo XVII, algunos autores como Borelli (1658) distinguieron entre el axioma universal (para el género cantidad) “El todo es mayor que la parte” y el axioma particular (geométrico) “El todo es igual a la suma de las partes”.[25] ¿Se trata de principios cuya “equivalencia” es asegurada diagramáticamente en Euclides, de forma tal que no habría considerado necesario incluirlo entre los mecanismos de cooperación diagrama/texto? ¿Es este segundo principio un aspecto no verbalizado de la cooperación diagrama/texto? ¿Cómo se relaciona su (supuesta) formulación “matemáticamente rigurosa” – el Postulado de De Zolt – con las nociones de equicomplementariedad y equidescomposición? Una respuesta, al menos tentativa, a estas preguntas supone que examinemos el papel que desempeña el mentado postulado en la teoría del área de Hilbert.

Hilbert advierte que el problema más fundamental de la teoría de la equivalencia consiste en la introducción de relaciones de *desigualdad* o *no equivalencia*. Dicho con mejor precisión: se debe elaborar un procedimiento que permita *ordenar* a los polígonos planos según sus ‘áreas’, sobre la base de la relación de equivalencia geométrica. En *Fundamentos* este problema es planteado en los siguientes términos:

> Al continuar con el desarrollo de la teoría del área nos encontramos con una dificultad esencial. Especialmente, las investigaciones llevadas a cabo hasta aquí dejan sin responder si quizás no todos los polígonos son equicomplementarios. En tal caso todos los teoremas recién demostrados se volverían irrelevantes y carentes de significado. *Con esto se relaciona la pregunta acerca de si, en dos rectángulos equicomplementarios con un lado en común, los otros lados son necesariamente congruentes*. (Hilbert 1971, p. 64. El énfasis es nuestro.)

Puesto que sabemos que todo triángulo es equicomplementario con un rectángulo con igual base y mitad altura, la pregunta anterior se reduce a probar que si dos triángulos equicomplementarios tienen bases iguales, entonces tendrán alturas iguales, i.e., la

[25] Sobre la evolución de las axiomatizaciones de los *Elementos* en la edad moderna véase De Risi (2016).

Proposición I.39 de *Elementos*, que en la teoría de Hilbert aparece como el teorema 48.[26] A propósito de este teorema, Hilbert prosigue:

> Este teorema fundamental se encuentra en el libro primero de los *Elementos* de Euclides como la Proposición 39. En la prueba Euclides apela al principio general sobre las magnitudes "el todo es mayor que cualquiera de sus partes" [Kaˆ tÕ Ólou toà m˜rouj me‹zÒu ™stw], un método que es equivalente a la introducción de *un nuevo axioma geométrico de equicomplementariedad*. Sin embargo, es posible establecer el teorema 48 y también la teoría del área de la manera propuesta, i.e., con la ayuda de los axiomas del plano y sin utilizar el axioma de Arquímedes. (Hilbert 1971, p. 64. El énfasis es nuestro.)

La principal tarea que Hilbert se propone resolver consiste en mostrar que aquel teorema central en la teoría de la equivalencia puede ser probado *sin asumir como un axioma* el principio específicamente geométrico correspondiente a la NC5, i.e., el postulado de De Zolt. Más aún, la relación establecida entre aquel teorema y la introducción de una relación de desigualdad para los polígonos planos, implica que el problema a resolver consiste en probar que es posible *ordenar (total o linealmente*) a los polígonos planos según sus áreas, sin asumir al postulado de De Zolt como un nuevo axioma geométrico ni el axioma de Arquímedes. En efecto:

> Si dos triángulos con igual base tienen igual área [*Inhalt*], entonces tienen también igual altura. ¿Existen en general triángulos que no son equivalentes [*Inhaltsgleich*]? *Totum parte majus est* se puede aplicar [aquí]? A priori naturalmente no, ya que este principio general de magnitudes se emplea recién en un teorema geométrico, cuando se le aplican nuestros conceptos geométricos. Stolz piensa que este principio debe ser tomado como un axioma, y Killing lo demuestra con la ayuda del axioma de Arquímedes. A ambos se les escapa lo esencial, puesto que este teorema es demostrable sin el axioma de Arquímedes. (Hilbert 1898: 279)

Intuitivamente, el hecho de que un polígono no puede ser equivalente con una parte propia es una *condición necesaria* para la existencia de un orden lineal[27], puesto que de no verificarse las relaciones en cuestión de equivalencia y no-equivalencia de polígonos no cumplirían la ley de tricotomía. Sin embargo, Hilbert se propone mostrar que dicha validez no necesita ser asumida, sino que puede – e incluso debe – ser demostrada.[28] Dicho incluso en términos más generales, el problema consiste en determinar bajo qué condiciones (y suposiciones) la relación de equivalencia (i.e., equidescomposición y equicomplementariedad) puede ser legítimamente considerada como una *relación de cantidad*.

---

[26] Hilbert 1971: 64.

[27] Para ser más precisos, la relación de orden total vale para el conjunto de las clases de equivalencia en las que queda partido el conjunto de los polígonos planos mediante la relación (de equivalencia) de 'igualdad de área', i.e. *equidescomposición* o *equicomplementariedad*.

[28] "Este modo de inferencia no está justificado, puesto que una vez que hemos establecido el significado de [la relación de] equicomplementariedad, entonces no nos está más permitido adoptar aquel principio como un axioma. Esta suposición podría incluso resultar incompatible con nuestra definición de "equicomplementariedad" [*Inhaltsgleichheit*] (…) Aquí se presenta también un error notorio en el procedimiento de prueba. Si queremos lograr que esta inferencia sea llevada a cabo de un modo correcto, entonces debemos proporcionar una demostración del teorema utilizado por Euclides, según el cual el todo es mayor que la parte" (Hilbert 1917: 90).

Ahora bien, para dar una respuesta a este interrogante, Hilbert sostiene que la noción de equivalencia geométrica no es suficiente, sino que se requiere la introducción del concepto de *medida de área* [*Flächenmaß*]. Dicha noción, sin embargo, es caracterizada de un modo *puramente geométrico*, conservando a la vez las *fórmulas habituales* para calcular la medida de área de las distintas figuras rectilíneas planas. Para ello Hilbert hace uso de un importante resultado técnico alcanzado previamente en *Fundamentos*, a saber: el cálculo de segmentos lineales [*Streckenrechnung*]. Como es conocido, Hilbert mostró que una vez que las operaciones de suma y multiplicación de segmentos lineales son definidas geométricamente del modo habitual, es posible utilizar los teoremas clásicos de Desargues y Pascal para probar que dichas operaciones satisfacen todas las propiedades que hoy asociamos a un *cuerpo ordenado*. De este modo, exhibió cómo se puede construir un conjunto de elementos geométricos que satisface todas las propiedades de un cuerpo numérico (abstracto), que además puede ser utilizado para reconstruir la teoría clásica de las proporciones y los triángulos semejantes, sin apelar a ningún tipo de consideración numérica ni a ningún postulado de continuidad (especialmente, el axioma de Arquímedes). Analicemos rápidamente su aplicación en la teoría del área, en la medida en que será relevante en lo que sigue.

Hilbert utilizó la aritmética de segmentos para definir funciones de *medida de área* para los polígonos planos, de acuerdo con las fórmulas habituales, pero de un modo puramente geométrico, i.e., dichas funciones no asignan a cada figura rectilínea plana un número (real) positivo, sino que toman como valores a los elementos del cuerpo ordenado de la aritmética de segmentos. En particular, la medida de área de un triángulo se define como el segmento característico *s*, que resulta de realizar el semiproducto de la base por la altura correspondiente, mientras que la medida de área de un polígono (simple) consiste en la suma de las medidas de áreas de los triángulos en los que se descompone el polígono de acuerdo a una determinada descomposición. Puesto de un modo – insistimos – esquemático, el núcleo de la teoría de la medida de área consiste en probar que dichas funciones *están bien definidas*, es decir, que la medida de área queda *unívocamente determinada* por la figura rectilínea en cuestión.

En el caso de los triángulos, se debe probar que la medida de área es independiente del lado escogido como base y de la altura correspondiente; en el caso de los polígonos en general, debe probarse que la medida de área es independiente de la descomposición de triángulos particular escogida para calcularla. Hilbert consigue llevar a cabo estas demostraciones por medio de razonamientos estrictamente geométricos, básicamente a partir de probar que las funciones de medida de área de polígonos planos satisfacen tres propiedades fundamentales: i) la medida de área es siempre mayor a 0[29]; ii) figuras congruentes tienen iguales medidas de áreas; y principalmente iii) dichas funciones satisfacen la propiedad aditiva.

La definición de función de medida de área de polígonos, y sus propiedades fundamentales, permiten establecer una vinculación inmediata con las relaciones de

[29] Para probar esta proposición Hilbert le asigna un *signo* a las medidas de área, en tanto el contorno del polígono sea recorrido en *sentido* positivo o negativo.

equivalencias: si dos polígonos son equicomplementarios (o equidescomponibles) entonces tienen igual medida de área. Pero de esta implicación se sigue fácilmente la prueba de la proposición buscada: si dos triángulos con la misma base *b* son equicomplementarios, entonces tienen la misma medida de área $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bh'$, de donde se infiere que sus alturas *h* y *h'* serán iguales. Por otro lado, la recíproca de la afirmación anterior es también válida, es decir, si dos polígonos tienen igual medida de área, entonces también son equicomplementarios (y equidescomponibles).[30] Hilbert establece de este modo una coimplicación entre las relaciones de equicomplementariedad y equidescomposición y el concepto de medida de área (Teorema 51); el postulado de De Zolt, formulado como el teorema 52, es un mero corolario de esta coimplicación:

Teorema 52 (Axioma de De Zolt). Si se descompone un rectángulo en diversos triángulos por medio de rectas, y si se separa solamente uno de estos triángulos, entonces no puede completarse el rectángulo con los restantes triángulos.[31]

En efecto, supongamos que un polígono *P* es descompuesto en los triángulos *Q*, *R* y *S*. Puesto que la medida de área de *P* es igual a la suma de las medidas de área de los triángulos *Q*, *R* y *S* (propiedad aditiva), y que la medida de área de un polígono (recorrido en sentido positivo) es siempre mayor que 0, se tiene que la medida de área de *P* es *mayor* que la suma de las medidas de área de dos cualesquiera de aquellos triángulos, digamos *Q* y *R*. De allí se sigue, por el teorema recién mencionado (i.e., teorema 51), que *P* no puede ser equicomplementario con $Q + R$, lo cual permite concluir la demostración buscada. Hilbert sostiene que esta prueba del 'axioma de De Zolt' le confiere un fundamento lógicamente sólido para la teoría de la equivalencia; ello equivale a afirmar que esta teoría constituye una alternativa adecuada para la conceptualización de la noción de área de una figura rectilínea plana. Sin embargo, dicha prueba hace un uso esencial de la noción de medida de área, aunque ciertamente definida de un modo puramente geométrico. Así, en la teoría de Hilbert, el fundamento lógicamente sólido para la teoría de la equivalencia supone en última instancia el desarrollo de los elementos básicos de una teoría de la medida.

En tanto que Hilbert se propone construir una teoría de la medida de área *sin asumir el axioma de Arquímedes* (o axioma de medida), se trata de una *teoría débil de medida*. Este carácter descansa de un modo esencial en su aritmética de segmentos, que tampoco supone la validez de dicho axioma, o de un modo más general, que no presupone la posibilidad de medir las *longitudes* de los segmentos lineales. Al introducir su definición de producto de segmentos lineales siguiendo el modelo cartesiano, i.e., por medio de la clásica construcción geométrica de la cuarta proporcional (*Elementos* VI.2), Hilbert advierte con insistencia que los segmentos lineales no deben ser identificados con sus longitudes (numéricamente expresadas). La operación definida es el producto de segmentos lineales, no el producto de (medidas de) *longitudes de segmentos lineales*. Esta correspondencia se consigue por medio de la inclusión del axioma de Arquímedes, en

[30] Esta afirmación es conocida actualmente como el teorema de Bolyai-Gerwien.
[31] Hilbert 1971: 79.

tanto que permite que, junto con el conjunto de todos los segmentos lineales, quede completamente determinado el conjunto de sus longitudes. Luego, en la teoría de medida habitual, la medida de área de una figura rectilínea dada, por ejemplo la de un triángulo, se calcula multiplicando las *medidas de longitud* de un lado y su correspondiente altura y dividiendo el resultado por dos. En la teoría de Hilbert, en cambio, las funciones de medida de área permiten asignar a cada figura plana un segmento característico, identificado con su medida. La teoría hilbertiana no presupone, por lo tanto, la medición de las longitudes de los segmentos lineales para calcular las medidas de área, al mismo tiempo que tampoco excluye la posibilidad de que las medidas de áreas así calculadas se correspondan con cantidades "no medibles" – i.e., cantidades no arquimedianas. Para clausurar esta posibilidad, resulta imprescindible la inclusión del axioma de Arquímedes.

Pero volvamos a la pregunta inicial respecto del papel que desempeña el postulado de De Zolt, convertido ahora en un teorema, *en la teoría de Hilbert*. ¿Cómo debe entenderse la interpretación de la NC 5 en términos de dicho postulado? Y ¿en qué medida el 'axioma de De Zolt' constituye, además de necesaria, una condición suficiente para comparar a todos los polígonos planos según la relación de equivalencia geométrica (i.e., equidescomposición o equicomplementariedad)? Una respuesta a estos interrogantes supone que examinemos cuál son los procedimientos con los que se dispone en la teoría de Hilbert para comparar polígonos planos según sus áreas. Recordemos que en este contexto afirmar que el conjunto de los polígonos planos es *comparable* significa que es posible introducir una relación de *orden total o lineal estricto*.

En tanto Hilbert introdujo el concepto de medida de área, una opción simple consiste entonces en comparar a los polígonos planos según sus *medidas* de área: a polígonos equivalentes le corresponden medidas de área *iguales* y a polígono mayor le corresponde medida de área mayor. Ello nos da una ordenación de los polígonos según sus medidas de áreas, puesto que la aritmética de segmentos satisface la estructura de un *cuerpo (linealmente) ordenado*. En este caso, el postulado de De Zolt es una mera consecuencia de la existencia de funciones de medida de los polígonos planos. Sin embargo, esta opción no constituye una respuesta completamente satisfactoria a nuestro problema, puesto que queremos saber si los polígonos pueden ser ordenados *exclusivamente* en función de la relación de equivalencia geométrica. Luego, aunque Hilbert no lo enfatiza de un modo explícito, el teorema 47 de *Fundamentos* sugiere un procedimiento en función del cual dicha comparación puede ser llevada a cabo:

Teorema 47: Para todo triángulo, y por lo tanto para todo polígono, siempre es posible construir un triángulo rectángulo, tal que uno de sus catetos sea 1 y que sea equicomplementario con el triángulo o con el polígono respectivamente. (Hilbert 1971, p. 63)

Este teorema, que Hilbert sólo demuestra de un modo esquemático, nos asegura que para todo polígono existe un rectángulo equicomplementario con una base dada, o más precisamente, con una *base igual a la unidad lineal*. En la teoría de Euclides, este teorema se correspondería con las Proposiciones I.44 y I.45, que muestran cómo transformar un triángulo y un polígono cualquiera en un paralelogramo equivalente con un lado y ángulo dado. Ahora bien, independientemente de los problemas que conlleva esta identificación del lado dado con la unidad lineal, este teorema proporciona efectivamente un procedimiento constructivo para comparar polígonos: dados dos polígonos cualesquiera, se los transforma en dos rectángulos equivalentes respectivamente con un lado común, y se procede entonces a compararlos según sus bases. Sin embargo, un aspecto crucial aquí es que, para que este procedimiento sea válido, el triángulo equivalente con base dada obtenido por medio de la transformación *debe ser unívocamente determinado por el polígono dado*; es decir, se debe garantizar que si dos rectángulos equivalentes tienen uno de sus lados en común, entonces el otro lado debe coincidir necesariamente. Como veíamos al inicio de esta sección, esta última afirmación equivale a la ya mentada proposición I.39, que en su recepción contemporánea requiere para su demostración del postulado de De Zolt (a menos que se introduzca el concepto de medida de área).

Para finalizar, cabe entonces preguntarse aquí: ¿Debemos interpretar al postulado de De Zolt como la versión "matemáticamente rigurosa" de la NC 5? En el caso en que ambos principios no se correspondan bajo reinterpretación con la misma proposición, ello constituirá un claro indicio de que la pretendida reconstrucción de la teoría del área de Euclides propuesta por Hilbert introduce elementos que no son propios de la práctica euclidiana. Hemos adelantado algunas dudas, que desarrollaremos en otro trabajo, para no aceptar una "equivalencia" entre ambos principios, pero una conjetura general podemos aquí arriesgar: si para la *práctica euclidiana* basta que la NC 5 – parte del mecanismo de interacción diagrama-texto – sea condición suficiente para *comparar* áreas de polígonos, para la *práctica hilbertiana* la NC 5, bajo la forma del Postulado de De Zolt, devendría en condición también necesaria para *ordenar* áreas poligonales. Pero, además, en una teoría matemáticamente rigurosa de la equivalencia como la que propone Hilbert, De Zolt tendrá que resultar un teorema, no un axioma geométrico adicional, aunque ello sea resultado de una noción geométrica de medida (en el sentido en que hemos intentado caracterizarla).[32]

[32] Debemos dejar constancia aquí de nuestro agradecimiento a Max Dickmann, Max Fernández de Castro y Marco Panza, por las valiosas observaciones y sugerencias realizadas a versiones anteriores de este trabajo. Agradecemos también los comentarios del *referee* de la Revista Portuguesa de Filosofía, que en la medida de hemos intentado responder. Una versión preliminar fue presentada por el primero de los autores en ocasión del XXI *Cóloquio Conesul de Filosofía das Ciências Formais* en Salvador de Bahía (Brasil). Una serie de afirmaciones allí vertidas en relación al postulado de Zolt captaron la atención Paulo Veloso, quien en una notable intervención anticipó una respuesta negativa a la búsqueda de una prueba del mencionado principio geométrico en la que no intervenga la noción de medida de área. Tras una lectura y examen de la penúltima versión del artículo, Veloso elaboró el apéndice que sigue a continuación, en donde se exponen los detalles técnicos de aquella intervención y se analizan algunas de sus consecuencias inmediatas.

Apéndice

Una teoría de las magnitudes debería proporcionar criterios para su equivalencia, comparación y adición. Examinaremos estos aspectos desde un marco abstracto, destacando dos problemas: independencia y definibilidad. Estas consideraciones han sido motivadas por el examen del principio de Zolt que fue realizado en este artículo. Formularemos y derivaremos también este principio.

Equivalencia y comparación

Como axiomas de *equivalencia* tomamos las siguientes tres propiedades habituales de la identidad (=): reflexiva ($a \sim b$), simétrica (si $a \sim b$, entonces $b \sim a$), transitiva (si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$).
Como axiomas de *comparación* $\leq$ tomamos las siguientes tres propiedades: reflexiva ($a \leq a$), transitiva (si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$) y total ($a \leq b$ o $b \leq a$).[33]
Asimismo, consideramos algunos axiomas que *conectan* equivalencia $\sim$ y comparación $\leq$: la equivalencia lleva a comparación (si $a \sim b$, entonces $a \leq b$) y las comparaciones llevan a equivalencia (si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a \sim b$).

Podemos también introducir algunas comparaciones definidas como sigue: *comparación inversa* $a \geq b$ si y sólo si $b \leq a$, *comparación estricta* $a < b$ si y sólo si $a \leq b$ y no $a \sim b$, y *comparación inversa estricta* $a > b$ si y sólo si $b < a$.

Los axiomas para la equivalencia $\sim$ y la comparación $\leq$ tienen modelos numéricos con $a \sim b$ si y sólo si $a = b$ y $a \leq b$ como era de esperar ($a \leq b$): naturales, no-negativos racionales y reales, además de sus restricciones a números no menores que 1.

Examinamos ahora nuestros problemas: definibilidad e independencia.

<u>Pregunta 1:</u> ¿Podemos definir la equivalencia $\sim$ a partir de la comparación $\leq$?

Repuesta: Sí, se define '$a \sim b$' como "$a \leq b \wedge b \leq a$".[34]

<u>Pregunta 2:</u> ¿Podemos definir la comparación $\leq$ a partir de la equivalencia $\sim$?

Respuesta: No, tenemos contra-modelos (véase infra: *Contra–modelos*).

<u>Pregunta 3:</u> ¿El axioma de comparación total es independiente de los otros axiomas de comparación $\leq$?

Respuesta: Sí, tenemos contra-modelos (véase infra: *Contra–modelos*).

Comparación y adición

Proseguimos ahora con la adición †; comenzaremos con una versión simplificada y luego consideraremos un abordaje general.

[33] Totalidad (o linealidad) significa que dos elementos son siempre comparables.
[34] Luego, $\sim$ es claramente simétrica; la reflexividad y transitividad de $\sim$ se siguen de la reflexividad y transitividad de $\leq$.

Hagamos un breve examen del comportamiento esperado de la adición simple (que suponemos asociativa): a † (b † c) = (a † b) † c.)

En general, uno esperaría que la adición provoque un incremento estricto: esto es lo que ocurre con la concatenación de líneas rectas "propias". Sin embargo, la concatenación con una línea recta de un único punto (la recta nula) no altera a la línea.

Examinamos ahora estas ideas en un marco abstracto.

Considérese una magnitud t. Llamamos a *t trivial a izquierda* si y sólo sí t † $b \leq b$, para alguna magnitud b. Llamamos a *t trivial a derecha* si y sólo sí a † $t \leq a$, para alguna magnitud a. Una magnitud es *trivial* si y sólo si es trivial a derecha o trivial a izquierda. Una magnitud es *propia* si y sólo si no es trivial.

Las magnitudes triviales son cerradas bajo equivalencia: si $c \sim d$, entonces c es trivial si y sólo si d es trivial.

Como axiomas de la *adición simple* † tomamos los siguientes.

- Dominación: $a \leq a$ † $b \geq b$ (la adición domina las partes).
- Monotonicidad: si $a \leq c$ y $b \leq d$, entonces a † $b \leq c$ † d.
- Cancelamientos: si a † $b \leq a$ † c con b *y* c propias, entonces $b \leq c$ y, si a † $c \leq b$ † c con a *y* b propias, entonces $a \leq b$.

Estos axiomas de adición simple † tienen modelos numéricos con $a \leq b$ como era de esperar ($a \leq b$): naturales, no-negativos racionales y reales con a † $b := a + b$ (suma), y sus restricciones a números no menores que 1 con a † $b := a \,.\, b$ (producto).

Ahora examinamos nuestros problemas: definibilidad e independencia.

<u>Pregunta 4:</u> ¿Podemos definir la adición simple † a partir de la comparación ≤?

Respuesta: No, tenemos contra–modelos (véase infra: *Contra–modelos*).

<u>Pregunta 5</u>: ¿Podemos definir la comparación ≤ a partir de la adición simple †?

Respuesta: No, tenemos contra–modelos (véase infra: *Contra–modelos*).

<u>Pregunta 6</u>: ¿Los axiomas de adición simple † son independientes de los axiomas de comparación ≤?

Respuesta: Sí, tenemos contra–modelos.

<u>Pregunta 7</u>: ¿Los axiomas de comparación ≤ son independientes de los axiomas de adición simple †?

Respuesta: Sí, tenemos contra–modelos.

Examinamos ahora el abordaje general para la adición †.

Debemos considerar dos problemas: el primero es que a menudo deseamos sumar varias magnitudes y el segundo es que en ocasiones no podemos sumar dos magnitudes cualesquiera. El primero es fácil de resolver (basta con considerar listas), para el segundo restringimos la adición a magnitudes "compatibles": la reunión de líneas rectas no compatibles puede producir un no–segmento (con un "hueco").

Consideramos ahora listas de magnitudes. Un *corte* de una lista es una sub–lista que consiste en todos sus elementos menos uno.

Introducimos también listas compatibles (con compatibilidad hereditaria) y conjuntos suma (utilizando copias compatibles equivalentes).

Dado un concepto ¥ de compatibilidad, consideramos una lista de magnitudes $\underline{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.
La lista $\underline{a}$ es *compatible* si y solo si a_1 ¥ $a_2 \ldots$ ¥ a_{n-1} ¥ a_n y a_i † … † a_j es compatible con a_{j+1} † … † a_k.[35]
El *conjunto suma* $\Sigma\, \underline{a}$ consiste en las sumas b_1 † … † b_n, para listas compatibles $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ tales que $b_1 \sim a_1, \ldots, b_n \sim a_n$.
Reformulamos también los axiomas de adición: al restringirlos a casos compatibles, obtenemos los siguientes axiomas de *adición general* †.

- Dominación general: $a \leq a$ † $b \geq b$, para a ¥ b.
- Monotonicidad general: si $a \leq c$ y $b \leq d$, entonces a † $b \leq c$ † d, para a ¥ b y c ¥ d.
- Cancelamientos generales: cancelamientos a izquierda y a derecha.
    - Cancelamientos a izquierda: si a † $b \leq a$ † c con b *y* c propias, entonces $b \leq c$, para a ¥ b y a ¥ c.
    - Cancelamientos a derecha: si a † $c \leq b$ † c con a *y* b propias, entonces $a \leq b$, para a ¥ c y b ¥ c.

Todos los elementos de un conjunto suma son equivalentes y dominan los argumentos, más precisamente: dada una lista $\underline{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, considérese el conjunto suma $\Sigma\, \underline{a}$; para $c, d \in \Sigma\, \underline{a}$, tenemos que $c \sim d$; para $c \in \Sigma\, \underline{a}$ y cada $k = 1, \ldots, n$, tenemos $c \geq a_k$.
Una *descomposición* de una magnitud a es una lista $\underline{p} = \langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ tal que $a \in \Sigma\, \underline{p}$.
Tenemos ahora nuestra versión del principio de Zolt.
Teorema (Descomposición). Considérese una descomposición propia $\underline{p}$ de a. Luego, para cada corte $\underline{q}$ de $\underline{p}$: $\underline{q}$ no es una descomposición propia de a.
En efecto, si lo fuera, entonces el elemento suprimido sería trivial.

Contra–modelos[36]
Presentamos ahora algunos contra–modelos.
Considérese el conjunto de 2 elementos {T , ⊥} con ~ := {(T,T), (⊥, ⊥)}.
Con ≤ := {(T,T), (⊥, ⊥)}, tenemos un modelo que muestra que el axioma de totalidad es independiente de los otros axiomas (pregunta 3).[37]
Con ≤ := {(T,T), (T, ⊥), (⊥, ⊥)}, tenemos un modelo que muestra que ≤ no es definible a partir de ~ (pregunta 2),[38]
Estructura que consiste en los 2 elementos – y + con ≤ := {(-,-), (-, +), (+, +)} y a † b := + (constante). Esto proporciona un modelo que muestra que ≤ no es definible a partir de la adición simple † (pregunta 5).[39]

---

[35] Por ejemplo, $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es compatible si y sólo si a_1 ¥ a_2 ¥ a_3, a_1 † a_2 ¥ a_3 y a_1 ¥ a_2 † a_3.
[36] La demostración detallada del resultado y la exposición de sus consecuencias filosóficas serán objeto de un trabajo futuro.
[37] Los elementos T y ⊥ no son comparables.
[38] La función que intercambia T y ⊥ es una biyección de { T , ⊥ } que preserva ~ pero que no preserva ≤.
[39] La función – que intercambia - y + es una biyección de { - , + } que preserva † pero que no preserva ≤.

Estructura que consiste en los positivos racionales con a $\leq$ b si y sólo si a $\leq$ b y a † b := a . b (producto). Esto proporciona un modelo que muestra que la adición simple † no es definible a partir de $\leq$ (pregunta 4).[40]

Consideraciones finales

Podemos obtener una teoría de magnitudes que se comparta bien como sigue.

- Comenzamos con los axiomas de comparación $\leq$.
- Añadimos equivalencia ~ por definición.
- Incorporamos los axiomas de adición general †.

Obtenemos luego el principio de Zolt.

Referencias

Amaldi, Ugo. 'Sulla teoria dell'equivalenza'. En *Questioni riguardanti la geometria elementare*, editado por Federigo Enriques, 103– 142. Bologna: Ditta Nicola Zanichelli, 1900.

Borelli, Giovanni Alfonso. *Euclides restitutus, sive prisca geometriae elementa*. Pisa: F. Onofrio, 1658.

Borelli, Giovanni Alfonso. *Euclide rinnovato ovvero gli antichi elementi della geometria*. Bologna: Ferroni, 1663.

De Risi, Vincenzo. 'The development of Euclidean axiomatics', *Archives for the history of exact sciences*, no. 70 (2016): 591–676. doi: 10.1007/s00407-015-0173-9

Duhamel, Jean Marie. *Des méthodes dans les sciences de raisonnement. Deuxième partie. Application des méthodes générales à la science des nombres et à la science de l'étendue*. Paris: Gauthier Villars, 1878.

Enriques, Federigo y Amaldi, Ugo. *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori*. Bologna: Ditta Nicola Zanichelli, 1903.

Euclid. *The Thirteen Books of the Elements*. Traducido por Sir Thomas L. Heath. Cambridge: Cambridge University Press, 1956.

Euclides. *Elementos*. Traducido por María Luisa Puertas Castaño. Madrid: Editorial Gredos, 2007.

Ewald, William y Wilfried Sieg, eds. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1917–1933*. Berlin: Springer, 2013.

Faifofer, Aureliano. Elementi di geometria. Paris: Nony, 1880.

Gerwien, Paul. 'Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke', *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, no. 10 (1833): 228–234.

Hallett, Michael y Ulrich Majer, eds. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902*. Berlin: Springer, 2004.

[40] La función que asigna a cada *q* su doble es una biyección que preserva $\leq$ pero que no preserva †.

Hartshorne, Robin. *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer, 2000.
Hilbert, David. Grundlagen der Geometrie. *En Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Herausgegeben von dem Fest-Comitee.* Leipzig: Teubner, 1899.
Giovannini, Eduardo. ‘El reto de Hilbert en la teoría de las magnitudes poligonales: un capítulo de la axiomatización sintética de la geometría euclidiana’, *Revista Latinoamericana de Filosofía*, no. 43 (en prensa).
Hilbert, David. *Grundlagen der Geometrie. Mit Supplementen von Paul Bernays*. Stuttgart/Leipzig: Teubner, 1999.
Hilbert, David. *Foundations of Geometry*. Traducido por Leo Unger. LaSalle: Open Court, 1971.
Hilbert, David. Grundlagen der Euklidischen Geometrie, 1898. En *David Hilbert’s Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902*, editado por Michael Hallett y Ulrich Majer, 221–301. Berlin: Springer, 2004.
Hilbert, David. *Prinzipien der Mathematik*, 1917. En *David Hilbert’s Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1917–1933*, editado por William Ewald y Wilfried Sieg, 59–214. Berlin: Springer, 2013.
Lasalle Casanave, Abel y Seoane, José. ‘Las demostraciones por absurdo y la Noción Común 5’. En *Significado y negación: escritos lógicos, semánticos y epistemológicos*, editado por Carlos Caorsi, Ricardo Navia y Frank Sautter, 39-50. Montevideo: Udelar, 2016.
Manders, Kenneth. ‘The Euclidean Diagram’. En *The Philosophy of Mathematical Practice*, editado por Paolo Mancosu, 20–133. Oxford: Oxford University Press, 2008.
Panza, Marco. ‘The Twofold Role of Diagrams in Euclid's Plane Geometry’, *Synthese*, no. 186 (2012): 55–102. doi: 10.1007/s11229-012-0074-2.
Puig Adam, Pedro. Curso de geometría métrica. Madrid: Editorial Euler, 1980.
Volkert, Klaus. ‘Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone: einige Schritte in der Mathematisierung eines anschaulichen Konzeptes’, *Mathematische Semesterberichte*, no. 46 (1999): 1–28.
Zolt, Antonio de. *Principii della eguaglianza di poligoni preceduti da alcuni cenni critici sulla teoria della equivalenza geometrica*, Milano: Briola, 1882.