INTUICIÓN Y MÉTODO AXIOMÁTICO EN LA CONCEPCIÓN TEMPRANA DE LA GEOMETRÍA DE DAVID HILBERT*

Eduardo N. Giovannini
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
Universidad Nacional del Litoral

RESUMEN: El artículo indaga la concepción axiomática temprana de la geometría de Hilbert. Especialmente, sus notas para cursos sobre geometría entre 1891 y 1905 son analizadas. Se sostendrá que, aunque Hilbert privilegió desde el inicio una presentación axiomática abstracta de la geometría, también mantuvo en este período temprano tesis más tradicionales, como por ejemplo, la afirmación de que la geometría es la más perfecta de las ciencias naturales, que se ocupa de las propiedades o formas de los cuerpos en el espacio. Entre estas tesis, a primera vista contradictorias, Hilbert remarcó además a lo largo de sus cursos la importancia de la intuición 'espacial' o 'geométrica' en la axiomatización de la geometría. La noción y el papel de la 'intuición espacial' en el abordaje axiomático de Hilbert son discutidos. Por último, este énfasis en la noción de intuición será utilizado para criticar la interpretación formalista estándar, que será considerada como errónea, o al menos como inadecuada, a la luz de las fuentes antes mencionadas.

PALABRAS CLAVE: Hilbert, método axiomático, geometría, concepción temprana, intuición

* Agradezco a la *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen* por el permiso para citar los manuscritos de Hilbert; especialmente al Dr. Helmut Rohlfing, de la *Handschriftenabteilung*. Gran parte de la investigación que dio origen a este trabajo fue desarrollada en el *Institut für Philosophie*, *Universität Paderborn*, Alemania, gracias al generoso apoyo del DAAD. Agradezco además a Volker Peckhaus, Alejandro Cassini y Javier Legris por sus comentarios a versiones previas de este escrito. Quisiera expresar también mi reconocimiento al *referee* anónimo de la RLF por sus valiosas sugerencias y sus instructivos comentarios.

ABSTRACT: The paper discusses Hilbert's early axiomatic approach to geometry, particularly his notes for lecture courses between 1891 and 1905 are analyzed. It is argued that, although Hilbert privileged from early on an abstract axiomatic presentation of geometry, he also maintained in this early period more traditional theses, like the claim that geometry is the most perfect of all natural sciences, which deals with the properties or shapes of things in space. Among these, at a first glance, contradictory theses, Hilbert also stresses throughout the lecture courses the importance of "spatial" or "geometrical" intuition for the axiomatization of geometry. The role and notion of spatial intuition in Hilbert's early axiomatic approach are discussed. Finally, this emphasis on the notion of intuition will be used to criticize the standard, formalist view of Hilbert's axiomatic approach to geometry, which will be considered as misleading, or at least inadequate, when his notes for lectures courses are taken into account.

KEYWORDS: Hilbert, axiomatic method, geometry, early view, intuition

1. Introducción

Es una afirmación relativamente compartida por los historiadores de la lógica y la matemática que la célebre obra de David Hilbert (1862-1943), *Los fundamentos de la geometría* (1899), constituyó un hito fundamental para la concepción moderna del método axiomático. En este trabajo Hilbert logra presentar una lista completa de axiomas a partir de los cuales es posible construir, por medios puramente lógicos, la geometría euclídea elemental y deducir todos sus teoremas fundamentales. Junto a este notable logro matemático, el enorme impacto de la obra se debió mayormente a las novedades metodológicas allí introducidas. En la nueva presentación axiomática de la geometría desarrollada por Hilbert, los axiomas dejan de ser vistos como verdades inmediatas acerca de un dominio intuitivo fijo. Asimismo, Hilbert renuncia a dar una definición descriptiva de los elementos básicos, como por ejemplo 'punto', 'recta' y 'plano', afirmando que éstos se encuentran totalmente caracterizados por aquello que es establecido en los axiomas. El sistema de axiomas de Hilbert no sólo permitió remediar las distintas lagunas en las deducciones que caracterizaban a las demostraciones de Euclides, sino que su renovado tratamiento axiomático de la geometría llevó a concebirla como una disciplina más de la matemática pura.

Ahora bien, esta presentación de la geometría como un sistema axiomático formal, sumada al programa desarrollado posteriormente por Hilbert para la fundamentación de la matemática –el llamado 'programa de Hilbert'–, han contribuido a formar una imagen excesivamente formalista de su concepción de la geometría. Es decir, por lo general suele afirmarse que –y un claro ejemplo es el difundido artículo de Jean Dieudonné (1906-1992)– la idea detrás del método axiomático tal como lo entiende Hilbert es que los signos o símbolos gráficos con los que la matemática opera se vuelven a su vez su objeto de estudio. En ese sentido, "la matemática se vuelve un juego, cuyas piezas son los signos gráficos que se distinguen unos de otros por sus formas" (Dieudonné 1971, p. 261). Más aún, junto a la idea de la matemática como un mero 'inventario de fórmulas', esta interpretación –que denominaremos estándar–, sostiene además que el objetivo central del método axiomático de Hilbert aplicado a la geometría, y en continuidad con lo que más tarde serán sus ideas respecto de los fundamentos de la aritmética, es defender una imagen de toda la matemática como una colección de sistemas deductivos abstractos, construidos a partir de un conjunto de principios o axiomas arbitrariamente escogidos y sin un significado intrínseco.

Sin embargo, al menos en el caso de la geometría, esta interpretación se muestra visiblemente inadecuada cuando se indagan las fuentes utilizadas por Hilbert para la elaboración de su notable monografía de 1899. Contrariamente a la impresión de Hermann Weyl, para quien *Los fundamentos de la geometría* significó una novedad absoluta respecto de los intereses exhibidos en sus trabajos anteriores,[1] esta obra es el producto de una preocupación de Hilbert por los fundamentos de la geometría por casi diez años. Prueba de ello son los cursos que impartió desde 1891 sobre la temática, los cuales han sido publicados en el primer volumen de la *Hilbert Edition* (Majer y Hallett 2004). Estos cursos constituyen una fuente imprescindible para comprender la concepción hilbertiana de la geometría, principalmente en su etapa inicial. Ello se debe a que a diferencia de la monografía de 1899, Hilbert no se limita allí a presentar meramente los resultados de sus in-

1. Véase Weyl 1945, p. 635.

vestigaciones matemáticas, sino que por el contrario nos hace partícipes del proceso que condujo a tales descubrimientos, acompañado en muchas ocasiones de reflexiones de un carácter más bien filosófico.

Mi objetivo en las páginas que siguen es examinar la concepción temprana de la geometría de Hilbert, principalmente en base a las fuentes anteriormente mencionadas. Intentaré mostrar cómo la imagen de la geometría y del método axiomático presentada allí por Hilbert es más compleja que la pergeñada por la interpretación estándar, y en ocasiones contradictoria a ella. Asimismo, se prestará particular atención al rol atribuido a la difícil noción de "intuición". Esta noción, que más tarde se convertirá en un concepto central en la justificación epistemológica del conocimiento metamatemático en el programa de Hilbert, está presente constantemente a lo largo de estas notas. Sostendré entonces que una adecuada explicación de la relación entre la intuición y el método axiomático es fundamental para obtener una mirada más comprensiva de la concepción hilbertiana de la geometría, particularmente en su período inicial. Finalmente, argumentaré que, a pesar de ciertos cambios propios de la evolución de su pensamiento, Hilbert mantiene las tesis principales que caracterizan a su concepción axiomática de la geometría hasta prácticamente el final de su producción científica.

2. Un abordaje sintético: "Geometría Proyectiva" (1891)

La presentación axiomática de la geometría exhibida por Hilbert en 1899 se construyó sobre la base de la tradición de la geometría sintética, que tomó un gran impulso a mediados del siglo XIX con los trabajos de Gaspard Monge (1746-1818), Karl G. C. von Staudt (1798-1867) y Jakob Steiner (1796-1863). Esencial para esta tradición era evitar donde fuera posible la introducción de elementos numéricos. Este hecho es particularmente evidente en el primer curso que Hilbert dedicó a la geometría en el semestre de verano de 1891, en Königsberg, titulado "Geometría proyectiva". En la introducción, tras unas breves consideraciones históricas, Hilbert elogia a von Staudt por haber llevado a la geometría proyectiva al rango de una "ciencia autónoma", por medio de

una construcción "puramente geométrica" que no requiere de la medida.[2]

Ahora bien, junto a esta especial atención en torno a la introducción del número en la geometría, Hilbert defiende una tesis filosófica fundamental respecto de la diferencia epistemológica entre aquellas ramas de la matemática cuyos resultados pueden ser alcanzados apoyándose exclusivamente en el pensamiento puro (aritmética, análisis, álgebra) y aquellas ramas que, como la geometría, necesitan de algo más que el pensamiento puro para su construcción:

> La *geometría* es la *ciencia de las propiedades del espacio*, y se diferencia substancialmente de las *ramas matemáticas puras*, como la *teoría de números*, el *álgebra*, la *teoría de funciones*. Los *resultados de estas disciplinas* pueden ser alcanzados a través del *pensamiento puro*, en tanto que los hechos afirmados son reducidos por medio de claras *inferencias lógicas* a hechos más *simples*, hasta que finalmente sólo se vuelve necesario el *concepto de número entero*. (…) Al concepto de número entero podemos *arribar a través del pensamiento puro*. (…) *Métodos y fundamentos de la matemática* pertenecen al pensamiento puro. No necesito nada más que el pensamiento *lógico puro*, cuando me ocupo de la teoría de números o del álgebra. (Hilbert 1891a, p. 22).

Sin embargo, en la geometría sucede algo completamente distinto:

> No puedo nunca fundar las *propiedades del espacio* en la mera reflexión, tanto como no puedo reconocer de ese modo las *leyes básicas de la mecánica*, las *leyes de la gravitación* o cualquier otra *ley física*. El *espacio* no es un producto de mi *pensamiento*, sino que me es dado sólo a través de los *sentidos* [Sinne]. Para representarme sus *propiedades* necesito por ello de mis sentidos. Necesito de *la intuición y el experimento*, tanto como se los requiere para fundar las leyes físicas, donde también la *materia debe sernos dada a través de los sentidos*. (Hilbert 1891a, p. 22-3).

Con esta diferencia trazada entre aritmética y geometría Hilbert está haciendo alusión a la clásica distinción establecida por Gauss, distingo que hasta cierto punto era un lugar común en la época,

2. Cf. Hilbert 1891a, p. 25.

sobre todo entre geómetras alemanes. Hilbert sostiene así, en esta etapa bien inicial, que la geometría es el estudio de las propiedades del espacio físico, y que la base para su indagación es proporcionada por la experiencia y por un cierto tipo de intuición. Empero, y quizás contradictoriamente, que la geometría sea la ciencia del espacio físico no implica para Hilbert que sus axiomas sean verdades evidentes del espacio físico. Es decir, en cursos posteriores, y en la medida en que vaya desarrollando y perfeccionando su abordaje axiomático, Hilbert abandonará la idea de que los axiomas son verdaderos en el sentido de que su verdad está garantizada por el modo en que el mundo exterior espacial es. Sin embargo, más adelante en estas notas que estamos analizando, Hilbert afirma lo siguiente respecto del carácter del controvertido axioma de las paralelas: "Este axioma de las paralelas es proporcionado por la intuición. Si esta última es innata o adquirida, si aquel axioma expresa una verdad, si debe ser corroborado por la experiencia, o si ello es innecesario, es algo que aquí no nos ocupa. Sólo nos interesamos por la intuición y ella requiere de aquel axioma" (Hilbert 1891, p. 27). Como veremos, el punto es que la intuición nos proporciona un conjunto de hechos [*Tatsachen*], que debemos considerar como 'dados' y que deben ser tomados seriamente, pero de los que la geometría, en tanto ciencia desarrollada, es independiente. Hilbert no será nunca suficientemente claro al respecto, sin embargo la tesis que se conserva explícitamente hasta en sus últimos trabajos sobre la temática, es la de que la geometría, en lo que respecta a su origen, es una *ciencia natural*, o más precisamente, la más perfecta de las ciencias naturales. Asimismo, la posibilidad de interpretar esta intuición geométrica ya sea como una intuición a priori o como una intuición empírica, es algo que Hilbert repetirá sucesivamente a lo largo de estas notas.

Otro elemento interesante aquí es el contexto en el que la noción de intuición es introducida. Hilbert comienza señalando que puede concebirse que la geometría, en tanto disciplina única, consiste en tres ramas separadas, o más precisamente, en tres abordajes diferentes. En primer lugar tenemos a la "geometría de la intuición". Esta geometría se caracteriza por conducir todas sus afirmaciones a los hechos básicos de la intuición, sin investigar su origen y legalidad. La geometría intuitiva está conformada por la 'geometría escolar', la 'geometría proyectiva (sintética)' y el 'análisis situs', y

su valor es más bien pedagógico y estético. La geometría de la intuición se identifica, por ejemplo, con la geometría proyectiva cuando es desarrollada de un modo sintético puro, como en los trabajos de Reye (1886) y von Staudt (1847), citados por Hilbert. La geometría axiomática, en cambio, investiga cuáles de los axiomas ganados en la geometría intuitiva son necesarios para su construcción, y a ello le contrapone sistemáticamente geometrías en las que algunos de aquellos axiomas son omitidos. Su significado es fundamentalmente epistemológico. Un ejemplo de la geometría proyectiva axiomática sería *Las lecciones de geometría moderna* (1882) de Moritz Pasch. Por último, Hilbert señala que la geometría analítica coordina de antemano los puntos de una línea con los números y reduce de ese modo la geometría al análisis. Esta geometría es esencial para el empleo de la matemática en las ciencias naturales. Un desarrollo analítico de la geometría proyectiva puede verse en los trabajos de Plücker, Clebsh y Klein.[3]

El abordaje elegido por Hilbert en este curso es exclusivamente sintético, hasta el punto de que los principios de la geometría proyectiva son presentados como 'leyes fundamentales de la intuición' y no como axiomas (Hilbert 1891a, p. 28). Sin embargo, es interesante notar que a lo hora de referirse al valor o al rol de la intuición en geometría, Hilbert siempre lo hace contraponiéndola a la geometría analítica:

> En lugar de *operar con la intuición geométrica pura*, [la geometría analítica] emplea *el cálculo y la fórmula como herramienta de un significado esencial*. La *geometría analítica se conduce* de tal manera que introduce desde el principio el concepto de magnitud variable y de ese modo para cada *intuición geométrica* exhibe de inmediato la *expresión* analítica, proporcionando por medio de esta última la demostración. De este modo se consigue obtener rápidamente mayor generalidad en los teoremas, respecto de lo que era posible con la intuición *geométrica pura*. (Hilbert 1891a, p. 55).

A pesar de la neutralidad proclamada en lo que respecta al estatus de la intuición, el uso de la expresión 'intuición pura', junto con la definición de la geometría como la ciencia que estudia las pro-

3. Cf. Hilbert 1891a, p. 21-22.

piedades del espacio, puede dar la impresión de que Hilbert favorece una suerte de kantismo. Sin embargo, es posible señalar otra fuente para el uso de este término, que resulta quizás más plausible. Como hemos señalado, Hilbert adopta en este primer curso un abordaje sintético o intuitivo a la geometría proyectiva. En ese sentido, el modo en que el curso está estructurado y las referencias explícitas allí mencionadas, muestran que la *Geometría de la posición* (1867) de Theodor Reye (Cf. Reye 1886), que a su vez se basa en el texto homónimo de von Staudt (von Staudt 1847), sirvió de guía para la elaboración de su curso. Luego, en la introducción de su texto, von Staudt señala que "cada lección de geometría debe partir de consideraciones generales que se hacen conocidas a los estudiantes por medio de distintos tipos de figuras geométricas y que ejercitan su facultad de la intuición" (von Staudt 1847, p. III). La expresión "facultad de la intuición" [*Anschauungsvermögen*] es utilizada constantemente por Hilbert a lo largo de estas notas. La intuición geométrica 'pura' es así cierta capacidad, que de hecho puede ser instruida y desarrollada, de percibir las relaciones geométricas fundamentales exhibidas generalmente en las construcciones geométricas e independientes de consideraciones numéricas. Precisamente, el carácter puro de esta intuición no hace así referencia a un carácter a priori – aunque no es incompatible con él – sino que se relaciona con el carácter puramente sintético de este modo de presentar a la geometría, en oposición a una presentación analítica basada en la introducción de elementos numéricos, es decir, en la expresión algebraica de las relaciones geométricas. Es precisamente en este sentido en el que Hilbert habla de la intuición geométrica en un breve artículo también de 1891, en donde presenta una construcción puramente geométrica de una curva anteriormente definida por Peano, que a su vez es un ejemplo de una función continua pero no diferenciable (Cf. Hilbert 1891b).

En septiembre del mismo año Hilbert asistió en Halle a la conferencia de H. Wiener (1857-1939) "Sobre fundamentos y construcción de la geometría" (Wiener 1891). Según sus biógrafos esta presentación significó una motivación importante para su arribo a un abordaje axiomático abstracto de la geometría.[4] Wiener señala allí

4. Véase Blumenthal 1922, p. 68.

que para hacer de la geometría una ciencia abstracta, pero que sin embargo "se desarrolle paso a paso en paralelo con los teoremas de la geometría", es necesario asumir únicamente ciertas premisas que consisten "en la existencia de ciertos objetos y ciertas relaciones, por medio de las cuales estos objetos están conectados" (Wiener 1891, p. 460). La conferencia de Wiener parece haberle transmitido a Hilbert una de las ideas que más tarde se volverán centrales en su método axiomático, a saber: que es posible utilizar a los axiomas de la geometría de tal modo que sólo expresen relaciones entre objetos no definidos cuyas únicas propiedades son aquellas expresadas por los mismos axiomas.[5] Por otra parte, la lectura del libro de Pasch sobre geometría proyectiva (Pasch 1882) y de *Los principios de la mecánica* (1894) de Hertz, fueron también factores relevantes para que en el curso siguiente Hilbert adopte un acercamiento decididamente axiomático.[6]

5. Más detalles sobre la conferencia de Wiener pueden verse en Toepell 1986.

6. No sólo el sistema de axiomas de 1899, sino además la concepción axiomática de la geometría de Hilbert, le debe mucho al trabajo pionero de Pasch. En efecto, Pasch fue quizás el primero en intentar presentar a la geometría como un sistema axiomático formal. En ese sentido, sostuvo explícitamente que, si la geometría había de ser construida realmente como una ciencia deductiva, entonces era necesario que sus demostraciones sean ejecutadas tanto con independencia del significado o 'interpretación' de los términos geométricos, como de los diagramas o construcciones geométricas. Prueba de ello es el siguiente pasaje, a menudo citado:

> En efecto, si la geometría ha de ser realmente deductiva, el proceso de inferencia debe ser siempre independiente del *significado* de los conceptos geométricos, al igual que debe ser independiente de los diagramas [*Figuren*]; sólo las *relaciones* fijadas entre los conceptos geométricos según aparecen en las proposiciones utilizadas, por ejemplo en las definiciones, pueden ser tomadas en consideración. Durante la deducción es útil y legítimo, pero de ningún modo necesario, pensar en el significado de los conceptos geométricos; de hecho, cuando se vuelve verdaderamente necesario hacerlo, ello demuestra que hay una laguna [*Lückenhaftigkeit*] en la deducción, y que (si esta laguna no puede ser eliminada modificando el razonamiento), las premisas son demasiado débiles para apoyarlo. (Pasch 1882, p. 98)

3. *El primer acercamiento axiomático*

El curso de 1894 titulado 'Fundamentos de la geometría' es de hecho el primer tratamiento axiomático de cualquier rama de la matemática realizado por Hilbert. El método axiomático, en el sentido que más tarde adquirirá en sus trabajos, no está aquí obviamente desarrollado como en los cursos de 1898/99 y en la monografía de 1899. Es decir, por un lado, Hilbert no lleva a cabo una investigación axiomática tal como es definida en la introducción de su curso de 1891, a saber: "una investigación sistemática de aquellas geometrías que surgen cuando uno o más axiomas [de la intuición] son dejados de lado" (Hilbert 1891a, p. 22) o reemplazados por su negación. Tampoco el método de proporcionar distintas interpretaciones o 'modelos' está presente en el grado en el que es desarrollado posteriormente. Sin embargo, las notas elaboradas por Hilbert para este curso constituyen un inicio del *análisis axiomático*, y en este sentido es posible afirmar que este texto prepara el camino para los posteriores tratamientos meta-geométricos (i.e. estudio de la independencia y consistencia de un sistema axiomático geométrico).[7]

A pesar de la novedad acarreada por el estilo axiomático de estas nuevas investigaciones, en la introducción Hilbert repite, y profundiza, la concepción general de la geometría y del conocimiento geométrico expresada anteriormente:

> Entre los *fenómenos o hechos de la experiencia* que se nos ofrecen en la observación de la naturaleza, existe un *grupo particularmente destacado*, es decir, el grupo de aquellos *hechos* que determinan la forma externa de las cosas [die äussere Gestalt der Dinge]. De estos hechos se ocupa la *geometría*. (Hilbert 1894, p. 72).

Hilbert repite así la definición tradicional de la geometría como la ciencia dedicada a estudiar las propiedades o formas de las cosas en el espacio. Sin embargo, a continuación agrega:

7. Sobre este punto puede verse la introducción del capítulo 2 de Majer y Hallett 2004.

> Como cada ciencia busca ordenar el grupo básico de hechos de su propio ámbito, o describir los fenómenos, como dice Kirchhoff, así hace exactamente la geometría con aquellos *hechos geométricos*. Esta organización o descripción acontece por medio de ciertos *conceptos*, que están conectados entre sí a través de las leyes de la lógica. Una ciencia se encuentra más avanzada, esto es, el *andamiaje de conceptos* [Fachwerk der Begriffe] es más completo, cuanto más fácilmente cada fenómeno o hecho es acomodado. (Hilbert 1894, p. 72).

La identificación de la geometría con una ciencia natural hace que la definición que aquí da Hilbert resulte hasta cierto punto contradictoria, o incompatible, con lo que de acuerdo a una concepción axiomática formal debe ser tenido por el objeto de estudio de la geometría. Siguiendo la comparación entre la geometría y las ciencias físicas, en especial con la mecánica, Hilbert emplea el término *descripción* para caracterizar al tipo de conocimiento al que apunta la geometría.[8] Hilbert no aclara nunca completamente que es lo que entiende por *hecho geométrico*, aunque su empleo sucesivo lleva a pensar que con ello se refiere no sólo a hechos empíricos, sino más bien a un conjunto de conocimientos o 'verdades geométricas' que han llegado a ser generalmente aceptadas o reconocidas a través del tiempo por medio de la acumulación de pruebas (demostraciones) e incluso, podría decirse, de observaciones.[9] Es precisamente este punto, es decir, la precisión o certeza que poseemos de los hechos básicos, lo que distingue a la geometría de otras ciencias físicas, o siguiendo el ejemplo de Hilbert, de la mecánica:

> La geometría es una ciencia que básicamente está tan desarrollada, que todos sus *hechos* pueden ser ya deducidos por medio de *inferencias lógicas* a partir de hechos previos; algo completamente distinto ocurre en, por ejemplo, la teoría de la electricidad o la óptica, donde todavía hoy nuevos hechos son descubiertos. Empero, respecto de su origen, la geometría es una *ciencia natural* (…). (Hilbert 1894, p. 72).

8. Acerca de la influencia de las discusiones entre físicos alemanes sobre los principios de la mecánica en la concepción temprana del método axiomático de Hilbert, véase Corry 2004.

9. Cf. Hallett 2008, p. 204.

Con esta imagen de la base epistemológica de la geometría de fondo, Hilbert introduce el objeto de su estudio axiomático del siguiente modo:

> El problema de nuestro curso versa así: cuáles son las condiciones *necesarias, suficientes* e independientes entre sí, que deben establecerse en un sistema de cosas, para que a cada propiedad de estas cosas le corresponda un hecho geométrico, e inversamente, para que por medio del mencionado sistema de cosas sea posible una *descripción completa u organización* de todos los hechos geométricos; o para que nuestro sistema se convierta en una imagen [*Bild*] de la realidad geométrica. (Hilbert 1894, p. 73).

Una serie de aclaraciones es aquí necesaria. En primer lugar, es evidente que el uso del término 'cosas' [*Dinge*] es muy vago. Posiblemente Hilbert adoptó esta terminología a partir del importante trabajo de Dedekind: ¿*Qué son y para qué sirven los números*? (1888). Esta obra ejerció una reconocible influencia en Hilbert, principalmente en este período temprano.[10] En efecto, Dedekind define en la introducción al término 'cosa' como "todo objeto de nuestro pensamiento" (Dedekind 1888, p. 105). En la medida en que su concepción axiomática vaya evolucionando, Hilbert comenzará a emplear el término 'cosas del pensamiento' [*Gedankendinge*], para aclarar que aquellos elementos que tomamos como básicos en una presentación axiomática pertenecen exclusivamente a un nivel conceptual.[11] Algo similar parece además sugerir Hilbert al señalar, refiriéndose a los *Principios de la mecánica* de Hertz publicado póstumamente en 1894, que "los axiomas son imágenes [*Bilder*] o símbolos en nuestra mente [*Geist*]" (Hilbert 1894, p. 74). En segundo lugar, lo que esta caracterización de los objetivos de sus investigaciones parece indicar es que, ya en este primer acercamiento, Hilbert se aleja de una posición 'formalista'. Es decir, el objetivo de un análisis axiomático de la geometría es inicialmente obtener un conocimiento lógicamente más perspicuo y exacto de un acervo de hechos fundamentales, fundados en la intuición, que son identificados con el conocimiento geométrico obtenido en una etapa más bien intuitiva o acrítica de la disciplina. En ese sentido, la tarea aquí definida para el método axiomático nada tiene que ver con la idea de que éste consiste exclusivamente en el estudio de las consecuencias que pueden derivarse lógicamente de un conjunto completamente *arbitrario* de principios o axiomas.

10. Acerca de la influencia de Dedekind en la concepción axiomática temprana de Hilbert véase Ferreirós 2009.

11. Hilbert emplea por primera vez el término 'Gedankendinge', aunque en relación a los objetos de la aritmética, en 1905 (Cf. Hilbert 1905c). Asimismo, una referencia muy clara, aunque probablemente un poco posterior, se encuentra en sus *Wissenschafliche Tagebücher*: "Los puntos, líneas y planos de mi geometría no son sino 'cosas del pensamiento' [*Gedankendinge*], y en cuanto tales nada tienen que ver con los puntos, líneas y planos reales" (Citado en Hallett 1994, p. 167).

Ahora bien, Hilbert reconoce también inicialmente que la manera de llevar a cabo esta tarea implica un nuevo modo de emprender los estudios axiomáticos, que significa una suerte de superación respecto del método axiomático tal como aparece en los *Elementos* de Euclides. En efecto, Hilbert afirma explícitamente que el 'sistema de cosas' que se supone debe presentar una imagen de la realidad geométrica, consiste en un *esquema de conceptos* en donde los conceptos básicos no tienen su referencia intuitiva habitual, sino que por el contrario pueden recibir diversas interpretaciones:

> En general debe afirmarse: nuestra teoría proporciona sólo un esquema [*Schema*] de conceptos, conectados entre sí por las invariables leyes de la lógica. Queda librado al entendimiento humano [*menschlicher Verstand*] cómo aplicar este esquema a los fenómenos, cómo llenarlo de material [*Stoff*]. Ello puede ocurrir de diversas maneras: pero siempre que los axiomas sean satisfechos, entonces los teoremas son válidos. Cuanto más fácil y más variadas son las aplicaciones, tanto mejor* es la teoría.
>
> * Cada sistema de unidades[12] y axiomas que describe completamente a los fenómenos está tan justificado como cualquier otro. Mostrar sin embargo que el sistema axiomático aquí especificado es, respecto de cierto punto de vista, el más simple posible. (Hilbert 1894, p. 104).

En la medida en que su posición axiomática vaya evolucionando, Hilbert irá ganando claridad en este punto. Sin embargo, pasa-

12. Hilbert equipara el significado del término unidad [*Einheit*] al de cosa [*Ding*].

jes como éste sugieren que ya en 1894 una de las ideas centrales de su método axiomático, en su aplicación a la geometría, estaba suficientemente definida. Hilbert reconoce que la axiomatización arroja un esquema de conceptos que se halla separado, por decirlo de algún modo, de la realidad [*Wirklichkeit*]. Ninguna interpretación puede ser por tanto privilegiada por sobre las otras. En otras palabras, la realidad no determina a la teoría geométrica, en el sentido en que la limita a lo que está justificado intuitiva y empíricamente. La geometría puede aprender así mucho de la intuición, pero no debe ser su esclava, incluso cuando haya desempeñado un rol fundamental en el establecimiento del conjunto de 'hechos', y por lo tanto, en la axiomatización. Como resultado de ello, las teorías no pueden ser directamente verdaderas o falsas por representar, o por fallar en representar, correctamente cierto objeto o dominio determinado.[13]

4. Hacia la concepción axiomática de los 'Fundamentos de la geometría' (1899).

Luego del curso de 1894, Hilbert interrumpió sus investigaciones sobre los fundamentos de la geometría para enfocarse exclusivamente en la elaboración de su reporte sobre cuerpos algebraicos numéricos, que concluiría con la publicación del trabajo que lo consolidó como uno de los matemáticos más importantes de la época: *La teoría de los cuerpos numéricos algebraicos* (1897). M. Toepell ha señalado que fue una carta de F. Schur a F. Klein, en donde el primero declara haber demostrado el teorema de Pascal en el plano utilizando sólo los teoremas de congruencia en el espacio y no el axioma de Arquímedes, lo que trajo a Hilbert de vuelta en las discusiones sobre los fundamentos de la geometría.[14] El resultado de esta nueva incursión es el curso dictado en el semestre de invierno de 1898/99, "Fundamentos de la geometría euclídea".

Este curso, que sirvió de base para la célebre monografía de 1899, posee dos versiones. Una consiste en las notas elaboradas por

13. Véase Hallett 2008, p. 214.
14. Cf. Toepell 1986.

el propio Hilbert (Hilbert 1898a), y en ese sentido, similares a los dos cursos que hemos visto anteriormente. La otra es una redacción o elaboración [*Ausarbeitung*] de un estudiante de doctorado de Hilbert, Hans von Schaper, bajo el título "Elementos de la geometría euclídea" (Hilbert 1898b). Este último texto, del cual se sabe fueron elaboradas setenta copias,[15] fue conocido por Frege y Hausdorff, entre otros.[16] Luego, este curso de Hilbert, en sus dos versiones, posee un notable interés para comprender cuáles fueron sus intenciones en la elaboración de su presentación axiomática de la geometría. Por un lado, la concepción axiomática tal como es presentada en (Hilbert 1899) se halla aquí plenamente desarrollada; incluso en ocasiones las investigaciones meta-geométricas son desarrolladas más extensamente que en aquel trabajo. Por otro lado, y a diferencia del escrito celebratorio (Hilbert 1899), Hilbert presenta muchas veces en este curso las diversas pruebas y demostraciones acompañadas de importantes, aunque breves, reflexiones filosóficas. Paradigmático es el caso de la noción de existencia matemática y el rol de las pruebas relativas de consistencia.

Hilbert inicia sus notas repitiendo la tesis según la cual la geometría debe ser considerada como una ciencia natural:

> Vamos a reconocer que la geometría es una *ciencia natural*, pero una ciencia tal, cuya teoría debe ser llamada *completa*, y que al mismo tiempo constituye un *modelo* para el *tratamiento teórico* de otras ciencias naturales. (Hilbert 1898a, p. 221).

Claramente se puede reconocer aquí lo que será más tarde el sexto problema enunciado por Hilbert en su célebre conferencia de París en 1900.[17] Por otra parte, el calificativo de completa, que ya fue mencionado anteriormente, merece una aclaración. Al calificar a la geometría de una ciencia completa, y principalmente, al sostener que su sistema axiomático debe ser capaz de ofrecer una *des-*

15. Hilbert 1898b, p. 302.
16. Acerca de las dos versiones del curso de Hilbert y de su relación con el *Festschrift* véase la introducción del capítulo cuatro de Majer y Hallett 2004.
17. Cf. Hilbert 1900a, p. 306.

cripción completa de los hechos geométricos, Hilbert tiene en mente algo distinto de lo que más tarde habrá de entenderse como la noción modelo-teórica de completitud. Por el contrario, Hilbert está utilizando aquí una noción más bien *pragmática* de completitud, similar al criterio de "corrección" de Hertz, a quien Hilbert se refiere breve pero constantemente a lo largo de estas notas. Este criterio indica que el sistema axiomático propuesto debe permitir la derivación de *todos* los teoremas conocidos de la disciplina en cuestión. De ese modo, los axiomas presentados en (Hilbert 1899) permiten obtener, afirma Hilbert, todos los resultados conocidos de la geometría euclídea, o incluso de la geometría absoluta (*i.e.* la geometría que se obtiene a partir de todos los axiomas de la geometría euclídea menos el axioma de las paralelas).[18]

Ahora bien, este curso también se halla claramente bajo el espíritu de los *Fundamentos de geometría* (1899), y por consiguiente, Hilbert defiende una presentación axiomática formal o abstracta, que puede resumirse en las famosas palabras iniciales de aquel texto: "Pensamos tres sistemas distintos de cosas: las cosas del primer sistema las llamamos *puntos* y las designamos con A, B, C…; las cosas del segundo sistemas las llamamos *líneas* y las designamos con *a,b,c*…; y las cosas del tercer sistema las llamamos *planos* y las designamos con α, β, γ…" (Hilbert 1899, p. 2). Sin embargo, es interesante notar cómo Hilbert conjuga estos dos elementos de su abordaje a la geometría – posición axiomática abstracta y concepción de la geometría como una ciencia natural:

> La geometría elemental (euclídea) tiene como objeto los hechos y leyes que el comportamiento [*Verhalten*] espacial de las cosas nos presenta. Según su estructura, es un sistema de proposiciones [*Sätzen*] que –en mayor o menor medida– pueden ser deducidas de un modo puramente lógico a partir de ciertas proposiciones indemostrables, los axiomas. Esta conducta, que en menor completitud encontramos, por ejemplo, en la física matemática, puede expresarse brevemente en la sentencia: *la geometría es la ciencia natural más completa*. (Hilbert 1898b, p. 302).

La posición de Hilbert parece ser que un estudio axiomático abstracto nos proporciona un conocimiento más claro de la estructura – *i.e.* las propiedades lógicas de los axiomas y su relación con los teoremas fundamentales – de, en este caso, la geometría elemental euclídea. En este sentido, el sistema axiomático obtenido por medio de la axiomatización proporciona un entramado de conceptos que no posee una relación inmediata con un dominio fáctico intuitivo. Sin embargo, en lo que respecta al lugar de la geometría dentro de las disciplinas matemáticas fundamentales, ésta sigue siendo una ciencia que en su base está esencialmente ligada a la experiencia y a nuestra intuición espacial.

18. Cf. Corry 2004, pp. 94-96.

Hilbert explicita aun más este punto en un curso sobre mecánica, también dictado en el semestre de invierno de 1898/99. En la introducción de estas notas, Hilbert define a la mecánica como la ciencia que estudia el movimiento de la materia, y cuya finalidad es describir este movimiento del modo más completo y simple posible. Mas para conocer el lugar que ésta ocupa entre la matemática y las ciencias naturales, es necesario observar el caso de la geometría:

> También la geometría surge [como la mecánica] de la observación de la naturaleza, de la experiencia, y en ese sentido es una *ciencia experimental*. En mi curso sobre geometría euclídea me introduciré en este tema más de cerca. Pero sus fundamentos experimentales son tan irrefutables y tan generalmente reconocidos, han sido confirmados en un grado tal, que no se requiere de ninguna prueba ulterior. Todo lo que se necesita es derivar estos fundamentos de un conjunto mínimo de *axiomas independientes* y así construir todo el edificio de la geometría por *medios puramente lógicos*. De este modo [i.e. por medio del tratamiento axiomático], la geometría se vuelve una ciencia *matemática pura*. (Hilbert 1898c, 1-2).

Es precisamente el grado de avance alcanzado por la geometría lo que vuelve imprescindible su análisis axiomático, en el modo en que ahora es reformulado por Hilbert. En un pasaje con un tono muy similar a la conferencia que casi veinte años más tarde pronunciaría en Zurich, titulada "El pensamiento axiomático" (Hilbert 1918), Hilbert da cuenta de esta necesidad:

> Cuanto más se acerca una ciencia natural a su objetivo: "la deducción lógica de todos los hechos que pertenecen a su campo a partir de ciertas proposiciones fundamentales", tanto más necesario se vuelve inves-

tigar estos mismos axiomas con precisión, indagar sus relaciones mutuas, reducir su número tanto como sea posible, etc. (Hilbert 1898b, p. 302).

Siguiendo las afirmaciones de Hilbert, una investigación exacta de los axiomas consiste en determinar en qué caso cada uno de ellos constituye una condición necesaria, suficiente e independiente para la construcción, por ejemplo, de la geometría euclídea elemental, o incluso de un dominio más acotado de ésta, como lo sería la geometría absoluta. Ahora bien, para la consecución de esta tarea es esencial que los axiomas no sean considerados como afirmaciones evidentes o verdades acerca de un dominio fijo determinado, y que por lo tanto sus conceptos básicos puedan recibir libremente distintas interpretaciones. Ello es evidente en uno de los tópicos más desarrollados en el *Fundamentos de la geometría* y en las notas para sus cursos, a saber: las preguntas por la "indemostrabilidad" de cierta proposición a partir de un conjunto de principios, o sea, las cuestiones de independencia. La técnica básica desarrollada por Hilbert a los efectos de desarrollar investigaciones de independencia consistió en modelar, que en este contexto específico equivale a traducir la teoría que se pretende investigar dentro de otra teoría matemática. Mas para ello es necesario que los conceptos primitivos no estén atados a su significado (intuitivo) fijo habitual, sino que por el contrario, deben poder ser reinterpretados.[19] El análisis axiomático se realiza sobre sistemas axiomáticos formales que, como dijimos, Hilbert reconoce desde 1894 como esquemas conceptuales cuyas proposiciones no afirman nada acerca de un dominio intuitivo concreto. Sin embargo, Hilbert aclara aquí –anticipándose a la afirmación tan problemática de la introducción de Hilbert 1899– que todavía este análisis puede enseñarnos algo acerca de nuestra intuición del espacio, y por ello, en cierto sentido su análisis axiomático puede ser considerado como un "análisis lógico de nuestra facultad de la intuición" (Hilbert 1898b, p. 303). Afortunadamente, Hilbert proporciona en estas notas más indicios de cómo interpretar esta afirmación.

19. Acerca de las ideas "modelo-teóricas" presentes en Hilbert 1899, véanse Hallett 1994 y Demopoulos 1994.

5. Un 'análisis lógico de la intuición'

En la introducción de las notas que estamos analizando, Hilbert vuelve a repetir la definición de la tarea del método axiomático, inspirada al igual que en cursos anteriores en la *Bildtheorie* de Hertz: el sistema axiomático propuesto debe servir como una imagen simple y completa de la realidad geométrica. Sin embargo, inmediatamente después señala lo siguiente: "Finalmente podemos referirnos a nuestra tarea como a un *análisis lógico de nuestra facultad de la intuición* [Anschauungsvermögen]; la cuestión, de si nuestra intuición espacial es a priori o tiene un origen empírico, permanecerá aquí sin discutir" (Hilbert 1898b, p. 303). El papel atribuido por Hilbert a la intuición en la práctica del método axiomático, hace que la pregunta filosófica acerca del estatus de esta intuición quede fuera de cuestionamiento. Sin embargo, a continuación añade:

> A partir de lo dicho queda en claro la *relación de este curso con aquellos sobre geometría analítica y geometría proyectiva* (*sintética*). En ambas disciplinas las preguntas fundamentales no son tratadas. En la geometría analítica se comienza con la introducción del número; por el contrario nosotros habremos de investigar con precisión la justificación para ello, de modo que en nuestro caso la introducción del número se producirá al final. En la geometría proyectiva se apela desde el principio a la intuición, mientras que nosotros queremos analizar a la intuición, para reconstruirla, por decir de algún modo, en sus componentes particulares [*einzelne Bestandteile*]". (Hilbert 1898b, p. 303).

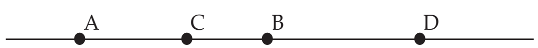
En el párrafo siguiente Hilbert asocia a esta intuición propia de la geometría proyectiva, y de la geometría sintética en general, al empleo de figuras geométricas. Y aclara que aunque en lo que sigue la utilización de figuras será algo relativamente usual, nunca se deberá confiar en ellas (Hilbert 1898b, p. 303). El análisis de la intuición significa luego que, aunque ésta nos proporciona los hechos básicos a partir de los cuales debemos construir la geometría, no asumiremos de antemano su validez y buscaremos precisar con claridad los distintos componentes de nuestra intuición geométrica por medio de un análisis axiomático formal que nos permita conocer las propiedades lógicas, como por ejemplo la independencia, de los diversos axiomas. Hilbert aclara esta idea en un interesante ejemplo.

En la sección II de (Hilbert 1898a) y (Hilbert 1898b), Hilbert introduce el grupo de axiomas de orden, formado por cuatro axiomas lineales y por el llamado axioma de Pasch, que determina las relaciones de orden en el plano.[20] Estos cinco axiomas coinciden con el grupo de axiomas de orden de (Hilbert 1899). Luego de demostrar una serie de teoremas básicos, Hilbert indaga las propiedades "meta-geométricas" de los axiomas, a saber: consistencia e independencia. Este punto es una diferencia importante respecto de (Hilbert 1899), en tanto que allí Hilbert se limita a demostrar una serie de teoremas, consecuencias de este grupo de axiomas, y continúa inmediatamente con el grupo de axiomas de congruencia, obviando las investigaciones meta-geométricas. El grupo de los axiomas de orden sirve para caracterizar con exactitud el concepto "entre". Hilbert afirma entonces que el grupo formado por los cuatro primeros axiomas –los axiomas lineales– es consistente, es decir, que los axiomas no se contradicen entre sí. Una demostración de dicha afirmación es posible si "interpretamos" a los puntos de una línea como números reales positivos y negativos, y afirmamos que el punto β se encuentra entre α y γ en el caso de que:

$$\alpha < \beta < \gamma \text{ o } \alpha > \beta > \gamma.$$

20. Los axiomas lineales de orden presentados en (Hilbert 1898a, p. 227-241) y (Hilbert 1898b, p. 307-319) son:

1. Si A, B, C son puntos de una línea, y C se encuentra entre A y B, entonces C se encuentra también entre B y A.
2. Si A, B son puntos de una línea, entonces existe siempre al menos un punto C, que está entre A y B, y al menos un punto D, de modo que B está entre A y D.



3. Dados tres puntos cualesquiera de una línea, siempre hay uno y sólo uno de ellos que se encuentra entre los otros dos.
4. Cuatro puntos A, B, C, D cualesquiera de una línea pueden ser siempre ordenados de tal modo, que B se encuentra entre A, C y entre A, D; y además C está entre A, D y entre B, D.

De este modo los axiomas 1-4 son satisfechos.[21] En cuanto a la independencia, los axiomas 1-4 son independientes del grupo de axiomas I (los axiomas de incidencia), porque este último grupo no afirma nada acerca de la relación de los puntos de una línea entre sí. Asimismo, Hilbert señala que es posible demostrar que el axioma 4 no es una consecuencia de los axiomas 1-3, o sea, que el axioma 4 es independiente respecto de los axiomas 1-3. La demostración que propone es la siguiente: Representemos los puntos A, B, C, a través de los números reales α, β, γ respectivamente. Además afirmamos que: C se encuentra entre A y B, sí y sólo sí $\gamma > \alpha$ y $\gamma > \beta$ (en otras palabras, el punto C se encuentra 'detrás' o a la derecha de A y B). Luego, es evidente que dada está definición, los axiomas 1-3 son válidos pero el axioma 4 no. Pues si tomamos una ordenación de cuatro puntos en el sentido del axioma 4, entonces debe cumplirse que:

$$\beta > \alpha, \beta > \gamma, \beta > \delta$$

y al mismo tiempo que:

$$\gamma > \alpha, \gamma > \beta, \gamma > \delta$$

lo que sin embargo es contradictorio.[22]

Hilbert ilustra aquí con un simple ejemplo el procedimiento típico utilizado para realizar las pruebas de independencia. Mas la conclusión que de allí extrae es sumamente interesante:

> 'Entre' es antes que nada una relación de un punto con otros dos, y recibe un contenido a través de los axiomas. Si se quiere recién entonces se puede utilizar la palabra 'entre'. Pero no por ello debe pensarse que nuestras investigaciones son superfluas. Más bien ellas son un *análisis lógico de nuestra facultad de la intuición*. (Hilbert 1898a, p. 230. El énfasis es mío).

En un sentido estricto, estas investigaciones son más bien un análisis lógico de los *axiomas*, no de la intuición. Sin embargo, lo

21. Hilbert 1898a, p. 229.
22. Hilbert 1898a, p. 229 y Hilbert 1898b, p. 310.

que sugieren estos ejemplos, en mi opinión, es una clara posición anti-formalista de Hilbert en su análisis axiomático de la geometría, que debe ser entendida del siguiente modo: el interés de realizar un análisis axiomático de la geometría, y en particular de la geometría sintética elemental, es ofrecer una descripción lógicamente más precisa y completa de la estructura de esta disciplina matemática. Ello significa que, en tanto que para Hilbert la geometría elemental se funda en gran parte en nuestra intuición espacial, el examen axiomático formal proporciona un conocimiento de las propiedades lógicas de los hechos intuitivos fundamentales que están en la base de esta geometría, y en ese sentido, de la intuición. El análisis axiomático puede ser así visto como una reconstrucción racional o conceptual, que por medio de la axiomatización proporciona un sistema axiomático formal cuyas propiedades lógicas son conocidas principalmente por medio del procedimiento de modelar o reinterpretar, que *per se* supone el abandono de toda interpretación intuitiva fija. En breve, para analizar a la intuición geométrica debemos ir más allá de ella o abandonarla. El método axiomático como un análisis lógico de la intuición no es entonces incompatible con la idea, sino que más bien la implica, de que diversos axiomas cuya certeza intuitiva no es evidente pueden ser postulados. Sin embargo, el modo en que Hilbert entiende explícitamente aquí el objetivo del método axiomático hace que la interpretación formalista estándar resulte inadecuada. Particularmente, la interpretación según la cual la finalidad de un análisis axiomático es el estudio de las consecuencias que pueden obtenerse deductivamente de un conjunto de principios *arbitrariamente elegidos*, y sin ningún sentido intrínseco, oculta casi por completo el interés y el provecho que Hilbert vislumbra en este período en un abordaje axiomático a la geometría.

Por otra parte, que el examen axiomático nos proporcione un análisis lógico de la intuición, por ejemplo, que pueda mostrarnos que el grupo de axiomas de orden, que "expresan hechos básicos de nuestra intuición" (Hilbert 1899, p.437) está conformado por un conjunto de axiomas independientes entre sí, no significa de ningún modo que el sistema axiomático propuesto sea una descripción directa o inmediata de un determinado dominio intuitivo dado:

> En cierto modo hemos dado en este curso una *teoría* de la geometría; deseamos ahora hacer una observación acerca de la *aplicación* de esta teoría *a la realidad*. *Las proposiciones geométricas nunca son válidas en la naturaleza con completa exactitud, porque los axiomas nunca son satisfechos* [erfüllt] *por los objetos*. Esta carencia en la correspondencia reside en la esencia de toda teoría, pues una teoría, que se corresponda hasta en detalle con la realidad, sería sólo una descripción exacta del objeto. (Hilbert 1898b, p. 391)[23]

Las distintas interpretaciones que puedan darse del sistema axiomático formal sólo pueden tener, según Hilbert, un carácter *aproximativo*. La geometría ya no puede ser concebida como una descripción del espacio físico, lo que sin embargo significa para Hilbert que la relación entre geometría e intuición debe ser repensada, no simplemente eliminada.

6. Consideraciones finales: la concepción madura

El objetivo de este trabajo ha sido mostrar una serie de tesis que componen la concepción axiomática temprana de la geometría de Hilbert, principalmente presentadas en sus notas para un conjunto de cursos sobre geometría a lo largo de la década de 1890, con el objetivo de separarla o diferenciarla de una concepción radicalmente "formalista" o modernista de las matemáticas. Hemos visto que la posición de Hilbert experimenta una suerte de evolución, desde el primer curso de 1891, hasta el curso de 1898/99, antecedente inmediato de los *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899). En efecto, Hilbert comienza afirmando que la geometría es la ciencia que estudia las propiedades o formas de las cosas en el espacio, y que por lo tanto está fundada en la intuición y en la experiencia. Los cursos posteriores exhiben, sin embargo, una concepción axiomática abstracta relativamente consolidada, en donde se afirma que el análisis axiomático se ocupa únicamente de un esquema o entramado de conceptos, cuya aplicación o relación con la realidad se da por medio de interpretaciones, que sin embargo sólo pueden tener un carácter aproximativo. Esta concepción axiomática abs-

23. Véase también Hilbert 1898b, p. 401 y 1898a, p. 283.

tracta, sin embargo, no quita para Hilbert que todavía la geometría siga manteniendo una vinculación importante con la intuición. No sólo ésta es esencial para el establecimiento de los axiomas, sino que incluso se afirma que, por medio del estudio axiomático, todavía podemos obtener un conocimiento de la estructura, o de las propiedades lógicas, de esta suerte de intuición que se halla detrás nuestro conocimiento geométrico, cuando la geometría es desarrollada de un modo más bien impreciso e informal. Ahora bien, es interesante notar que estas últimas ideas, que podrían resultar más bien inadecuadas para una concepción axiomática abstracta, son repetidas por Hilbert prácticamente hasta el final de su producción científica.

En el semestre de verano de 1927, Hilbert dictó su último curso sobre fundamentos de la geometría. La redacción [*Ausarbeitung*] del curso fue encargada a Arnold Schmidt, y luego fue completada con anotaciones de Hilbert. Estas notas revisten un gran interés, en tanto que en ellas se basó claramente la séptima edición de los *Fundamentos de la geometría*, que no sólo fue la última edición en vida de Hilbert, sino que además fue la que introdujo los cambios más significativos respecto de la edición original.[24] En la introducción de estas notas, Hilbert se refiere al objetivo de un estudio axiomático de la geometría en términos muy similares a los que hemos visto:

> Aplicaremos el método axiomático a la ciencia natural más completa, a la geometría, en donde éste también se construyó en primer lugar de modo clásico. El problema es: cuáles son las condiciones necesarias e independientes entre sí, a las que debemos someter a un sistema de cosas, para que a cada propiedad de estas cosas le corresponda un hecho geométrico e inversamente. ¿De qué modo debemos disponerlas, para que estas cosas sean una imagen completa de la realidad geométrica? (Hilbert 1927, p. 1).

24. En un interesante trabajo von Plato (1997) ha analizado cómo en las sucesivas ediciones de los *Fundamentos de la geometría* Hilbert modifica la formulación de los axiomas, pasando de postulados de carácter más bien constructivo a axiomas existenciales. Éste es un aspecto importante que comúnmente suele ser pasado por alto, ya que por lo general los axiomas tal como fueron presentados originalmente en 1899 no suelen ser citados.

El problema central que se plantea el abordaje axiomático a la geometría es aquí exactamente igual que en 1894 y 1898. Asimismo, en el reverso de la página Hilbert añade en lápiz la siguiente observación:

> Ahora bien, lo que no puede ser obtenido a través del pensamiento sino que sólo proviene de la experiencia (experimento), son los axiomas de la geometría, *i.e.* los hechos que la intuición constituye, al igual también que en la física.
> Esta investigación y este conocimiento no sólo tienen un valor primordial, sino que también sirven para asegurar la verdad.

No es fácil determinar qué es lo que Hilbert quiere significar con “asegurar la verdad”. Sin embargo, lo que sí es posible afirmar con seguridad es que su idea de que un análisis axiomático de la geometría constituye –aunque quizás deba decirse, indirectamente– un examen del contenido de un conjunto de axiomas fundados en la intuición, todavía sigue operando:

> La geometría es una ciencia muy expandida y ramificada y también sus fundamentos pueden ser tratados de diversos modos. No quiero dedicarme aquí ni a la geometría analítica ni a la sintética, sino que nuestro objetivo es más bien un análisis lógico de nuestra facultad de la intuición. (…) A partir del mencionado problema la relación de este curso con la geometría analítica y la sintética queda determinada. La geometría analítica parte de la introducción del concepto de número en la geometría, cuya justificación habremos de demostrar primero aquí. En la geometría sintética se apela a la intuición, es decir, se aceptan lo más posible las figuras de los fenómenos [*Erscheinungsbilder*], tal como se ofrecen y se busca a partir de allí deducir nuevos fenómenos. Por el contrario nosotros evitaremos a la intuición, porque aquí se trata de un análisis de la intuición. (Hilbert 1927, p. 2).

Esta cita muestra claramente la continuidad de las tesis que, como hemos visto, caracterizan a la concepción temprana de la geometría, con lo que podría denominarse su posición madura. Ahora bien, en mi opinión, lo que de estas afirmaciones puede aprenderse es cuál fue la posición de Hilbert respecto de qué *estilo axiomático* en geometría resulta beneficioso, a la vez que cuáles eran el interés y la utilidad que él veía en la práctica de tal método. A pesar de la insistencia constante en el vínculo entre la intuición y la geometría, es evidente a partir de una rápida lectura de sus trabajos, que la intuición no juega un papel directo o inmediato en sus investigaciones geométricas. Por el contrario, su análisis axiomático es más bien un análisis lógico de los axiomas, que por otra parte no pueden ser tomados como verdades inmediatas acerca de un dominio fijo determinado. Esta idea fue, según Bernays, la razón del enorme éxito de la monografía de Hilbert: la estricta separación entre la esfera espacial-intuitiva y la esfera matemática-lógica, y con ella la separación respecto de los fundamentos gnoseológicos de la geometría.[25] Sin embargo, esta separación estricta entre la esfera intuitiva y la esfera matemática, y consecuentemente, la nueva forma de considerar a los axiomas que ésta trae aparejada, puede llevar a pensar que una suerte de arbitrariedad es introducida en la geometría. En tanto que Hilbert abandona la concepción euclídea clásica, en su teoría cualquier principio arbitrariamente escogido puede ser postulado como un axioma, con la condición de que pueda probarse que el sistema axiomático resultante es consistente. Más aún, si los términos básicos como 'punto', 'línea', 'plano' no poseen más su referencia fija intuitiva, entonces deben ser ahora considerados como meros signos o símbolos vacíos, sin significado. En definitiva, es esta aparente arbitrariedad lo que llevaría a pensar que la idea central detrás de la teoría axiomática formal de Hilbert es que la matemática podría ser entendida como un juego, cuyas piezas son los signos gráficos sin significado, y cuyas relaciones están fijadas por los axiomas o reglas para el uso de los signos.[26]

En efecto, ésta no solo ha sido una lectura relativamente habitual de la imagen de la geometría presentada por Hilbert en 1899, sino que además fue la interpretación más inmediata que se hizo de su posición. Basta sólo con ver algunas de las reseñas que aparecieron tempranamente, por ejemplo, la de Poincaré (Cf. Poincaré 1903). Pero quizás más paradigmáticamente aun, ésta fue la lectura impulsada por Frege, no sólo en su célebre controversia epistolar con Hilbert, sino principalmente en la serie de artículos que ésta

25. Véase Bernays 1922, p. 192.

26. Entre otros, esta interpretación clásica puede encontrarse en Dieudonné 1971, vocero del grupo de matemáticos franceses Bourbaki.

originó (Frege 1903 y 1906). Frege equipara allí a la posición de Hilbert con la de un formalista radical, al estilo de la aritmética de Thomae y Heine, según los cuales toda teoría formal matemática en principio no es más que "un juego vacío de signos, carente de significado" (Frege 1906, p. 317). Más aún, en su crítica a la nueva noción de axioma, Frege advierte que un axioma hilbertiano o "moderno" constituye una proposición sin sentido, al igual que una construcción arbitraria de palabras como: "Todo anej bacea, por lo menos dos helas" (Frege 1906, p. 284). Sin embargo, y más allá de las declaraciones que hemos visto, es interesante mostrar que el mismo Hilbert se opuso *explícitamente* y *de inmediato* a este tipo de interpretación de su concepción axiomática. En las notas para un curso titulado *Los principios lógicos del pensamiento matemático* (1905), Hilbert anticipa y critica esta lectura de Frege. El pasaje es más bien largo, pero merece ser citado *in extenso*:

> Cuando uno se pregunta por el lugar, dentro de todo el sistema, de un teorema conocido desde antaño como el de la igualdad de los ángulos de la base de un triángulo, entonces naturalmente se debe apartar de las creencias tradicionales y de la intuición, y aplicar solamente las consecuencias lógicas de los axiomas presupuestos. Para asegurarse de ello, a menudo se ha hecho la sugerencia de evitar los nombres usuales de las cosas, ya que éstos pueden desviarnos, a través de las numerosas asociaciones con los hechos de la intuición, de la rigurosidad lógica. Se ha sugerido así introducir en el sistema axiomático nuevos nombres para 'puntos', 'líneas', 'planos', etc.; nombres que recuerden solamente lo que ha sido establecido en los axiomas. Se ha propuesto incluso que palabras como 'igual', 'mayor', 'menor', sean reemplazadas por formaciones arbitrarias de palabras, como '*a-rig*', '*b-rig*', '*a-rung*', '*be-rung*'. Ello es de hecho un buen medio pedagógico para mostrar que un sistema axiomático sólo se ocupa de las propiedades establecidas en los axiomas y de nada más. Sin embargo, en la práctica este procedimiento no es ventajoso, e incluso no está realmente justificado. En efecto, uno siempre debe guiarse por la intuición al formular un sistema axiomático y uno siempre tiene a la intuición como un objetivo [Zielpunkt]. Por lo tanto, no es defecto alguno si los nombres nos recuerdan siempre, e incluso hacen más fácil recordar, el contenido de los axiomas, puesto que se puede evitar fácilmente la intromisión de la intuición en las investigaciones lógicas, al menos con un poco de cuidado y práctica. (Hilbert 1905a, pp. 87-8).

Quizás esta importancia atribuida a la intuición permita mostrar que la posición de Hilbert no es tan modernista o formalista como la de otros partidarios de una concepción axiomática abstracta de la matemática, como por ejemplo sus contemporáneos Peano y Hausdorff. Más aún, en base a estas afirmaciones es posible ver cómo, en el caso de la interpretación de su concepción de la geometría, a menudo se ha incurrido en un error similar al de la interpretación de su concepción de la matemática en general. Es decir, tal como es ahora ampliamente reconocido, resulta claramente erróneo identificar al 'programa formalista' desarrollado por Hilbert durante la década de 1920, y principalmente en respuesta a las amenazas planteadas por el intuicionismo de Brouwer, con su filosofía o su concepción general de la matemática. Del mismo modo, parece igualmente injustificado reducir a la 'concepción filosófica' temprana de la geometría de Hilbert con su presentación axiomática formal de 1899, o más precisamente, con la aparente motivación formalista que de allí parece seguirse. Hasta cierto punto, dicha interpretación resulta comprensible, en tanto la totalidad de las ideas que hemos analizado fueron presentadas por Hilbert en escritos no publicados. Sin embargo, a la luz de estas fuentes, se vuelve evidente que su concepción axiomática de la geometría es más compleja que lo que la persistente imagen estándar de su posición nos ha enseñado.

BIBLIOGRAFÍA

BERNAYS, P. (1922), "Hilbert's Significance for the Philosophy of Mathematics", en: Mancosu, P. (ed.), *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, New York, Oxford University Press, pp. 189-197, 1998.

BLUMENTHAL, O. (1922), "David Hilbert", *Die Naturwissenschaften*, **4**:67-72

CORRY, L. (2004), *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918): From 'Grundlagen der Geometrie' to 'Grundlagen der Physik'*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

DEDEKIND, R. (1888), *¿Qué son y para qué sirven los números?*, Madrid, Alianza Editorial, 1998. Trad. José Ferreirós.

DEMOPOULOS, W. (1994), "Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory", *History and Philosophy of Logic*, **15**:211-225.

DIEUDONNÉ, J. (1971), "Modern Axiomatic Method and the Foundations of Mathematics", en: Le Lionnais, F. (ed.), *Great Currents of Mathematical Thought*, New York, Dover Publications, 2° edición, pp. 251-266.

FERREIRÓS, J. (2009), "Hilbert, Logicism, and Mathematical Existence", *Synthese*, **170**:33-70.

FREGE, G. (1903), "Über die Grundlagen der Geometrie", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **12**:319-324; 368-375.

FREGE, G. (1906), "Über die Grundlagen der Geometrie", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **15**:293-309; 377-404; 423-430.

FREUDENTHAL, H. (1957), "Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Zugleich einer Besprechung der 8. Auflage von Hilberts 'Grundlagen der Geometrie'", *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **4**:105-142.

HALLETT, M. (1994), "Hilbert's Axiomatic Method and the Laws of Thought", en: George, A. (ed.), *Mathematics and Mind*, Oxford, Oxford University Press, pp. 158-200.

HALLETT, M. (2008), "Reflections on the Purity of Method in Hilbert's 'Grundlagen der Geometrie', en: Mancosu, P. (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, New York, Oxford University Press, pp. 198-255.

HERZT, H. (1894), *Die Prinzipien der Mechanik*, Leipzig, Arthur Meiner.

HILBERT, D. (1891a), "Projektive Geometrie"; (MS. Vorlesung, SS 1891), en: Mayer y Hallett (2004).

HILBERT, D. (1891b), "Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück", *Mathematische Annalen*, **38**:459-460.

HILBERT, D. (1894), "Die Grundlagen der Geometrie"; (MS. Vorlesung, WS 1893-4), en: Mayer y Hallett (2004).

HILBERT, D. (1897), "Die Theorie der algebraischen Zahlkörper", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **4**: 175-546. (Reimpreso en Hilbert 1932, vol. 1, pp. 63-363)

HILBERT, D. (1898a), "Grundlagen der Euklidischen Geometrie", (MS. Vorlesung, WS 1898-9), en: Mayer y Hallett (2004).

HILBERT, D. (1898b), "Elemente der Euklidischen Geometrie", en: Mayer y Hallett (2004).

HILBERT, D. (1898c), "Mechanik", (MS. Vorlesung, WS 1898/9), Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, *Cod. Ms. D. Hilbert* 553.

HILBERT, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*, en: Majer y Hallett (2004).

HILBERT, D. (1900a), "Mathematische Probleme", en: Hilbert (1935), pp. 290-329.

HILBERT, D. (1900b), "Über den Zahlbegriff", *Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung*, **8**: 180-184.

HILBERT, D. (1905a), *Logische Principien des mathematischen Denkens*; (*MS. Vorlesung, SS 1905)*. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

HILBERT, D. (1905b), *Logische Principien des mathematischen Denkens*; (*MS. Vorlesung, SS 1905)*. Ausgearbeitet von M. Born. Niedersächsische Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, *Cod. Ms. D. Hilbert* 558a.

HILBERT, D. (1905c), "On the Foundations of Logic and Arithmetic", *The Monist*, **15**:338-352.

HILBERT, D. (1918), "Axiomatisches Denken", *Mathematische Annalen*, **78**:405-415.

HILBERT, D. (1927), *Grundlagen der Geometrie*; (*MS. Vorlesung, SS 1927)*. Ausgearbeitet von A. Schmidt. Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

HILBERT, D. (1935), *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, Berlin, Springer Verlag.

MAJER, U. Y HALLETT, M. (EDS.) (2004), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*, Berlin, Springer Verlag.

PASCH, M. (1882), *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, Teubner.

POINCARÉ, H. (1903), "Review of Hilbert's Foundation of Geometry", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **2**:1-23.

REYE, T. (1886), *Die Geometrie der Lage*, Leipzig, Baumgärtner, 3° edición.

ROWE, D. (2000), "The Calm before the Storm: Hilbert's Early View of the Foundations", en: Hendriks, V. et al. (eds.), *Proof Theory. History and Philosophical Significance*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 55-93.

von PLATO, J. (1997), "Formalization of Hilbert's Geometry of Incidence and Parallelism", *Synthese*, **110**:127-141.

von STAUDT, F. (1847), *Geometrie der Lage*, Nürnberg, Verlag von Bauer und Raspe.

TOEPELL, M. (1986), *Über die Entstehung von David Hilberts Grundlagen der Geometrie*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

WEYL, H. (1944), "David Hilbert and his Mathematical Work", *Bulletin of Symbolic Logic*, **50**:612-654.

WIENER, H. (1891), "Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie", *Jahresbericht der Deutschen Mathematikern-Vereinigung*, **1**:45-48.

Recibido: 12-2010; aceptado: 03-2011